



Approccio ai concetti fondamentali della fisica quantistica mediante la trattazione fenomenologica e formale della polarizzazione della luce

Prof. Franco D'Orazio
Università degli studi dell'Aquila
Dipartimento di Scienze Fisiche e Chimiche

franco.dorazio@aquila.infn.it

Da:

Fisica Quantistica - Una Proposta Per La Didattica
di Marisa Michelini e Alberto Stefanel

Univeristà di Udine

Unità di Ricerca in Didattica della Fisica

<http://www.fisica.uniud.it/URDF/>

<http://www.fisica.uniud.it/URDF/laurea/idifo1/materiali/g6/MecQuan2.pdf>

Questa presentazione sarà presente tra breve su:

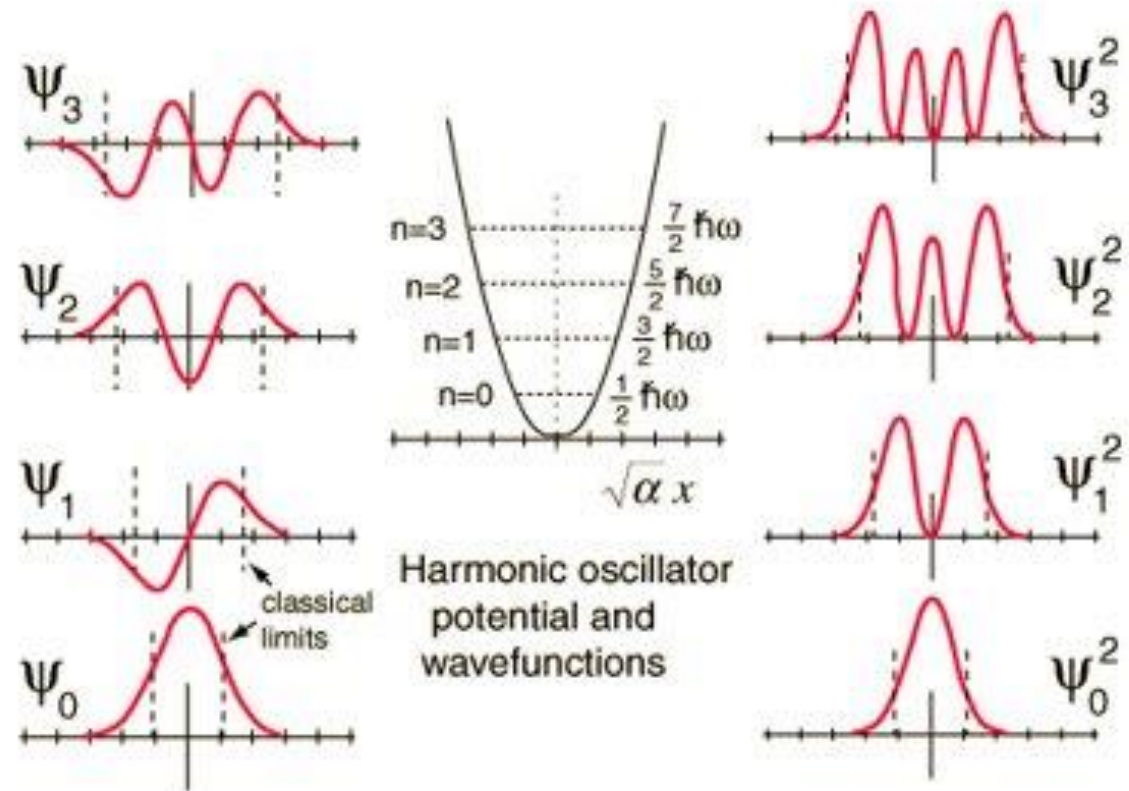
<http://dsfc.univaq.it/lozzi/PLS.html>

PREMESSA

- In fisica quantistica lo stato di un sistema è individuato a partire da una serie di stati (autostati) «ortogonali» fra loro, ovvero con proprietà fisiche osservabili, mutuamente esclusive.
- All'atto della misura, il sistema sarà in uno di questi «autostati».
- Prima della misura il sistema, a priori, può essere in uno degli autostati secondo una probabilità che segue le leggi della statistica.

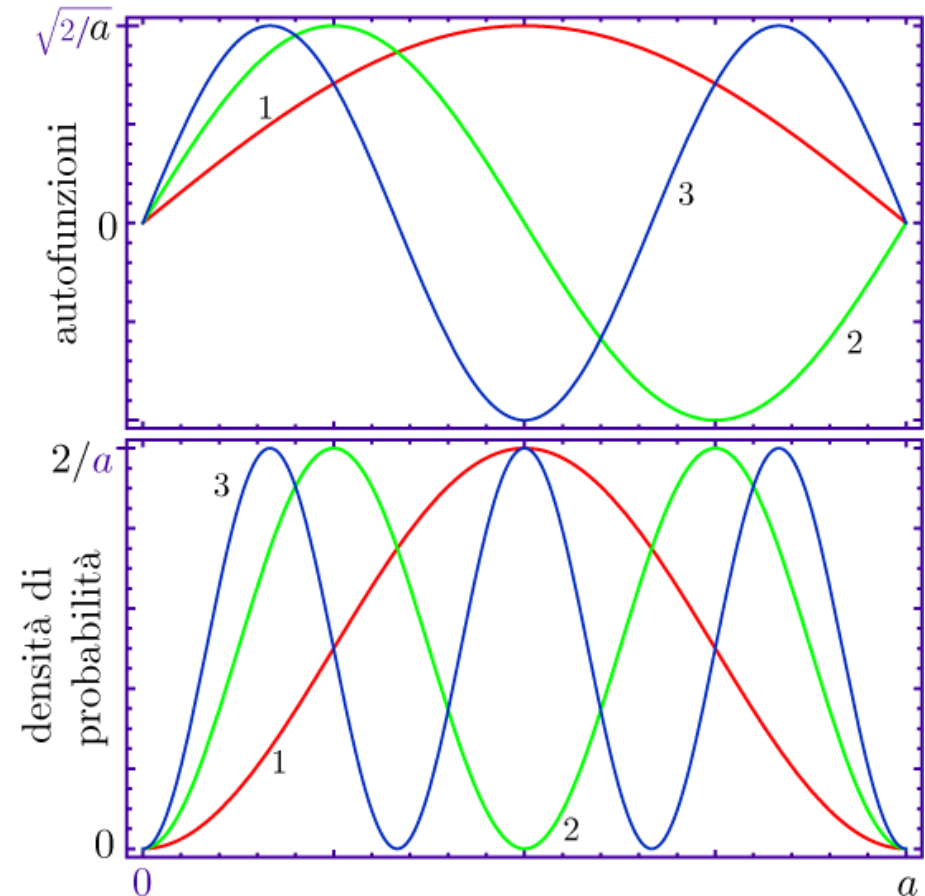
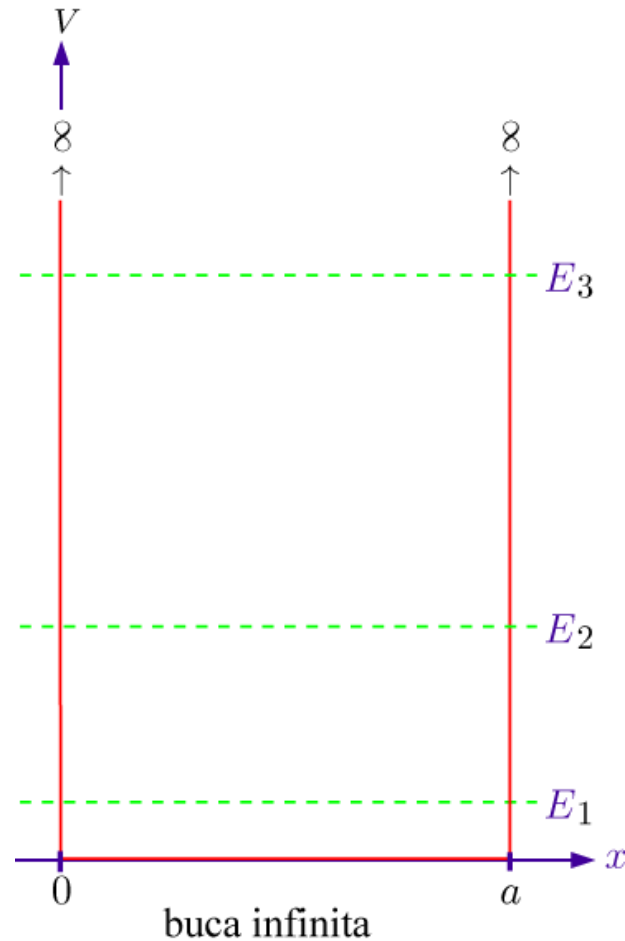
- Esempio: l'oscillatore armonico. Per oscillazioni lungo una dimensione esiste un unico numero quantico n che determina lo stato del sistema. L'osservabile fisico energia per uno stato (autostato) con numero quantico n è:

$$E = (n + 1/2)\hbar\omega$$

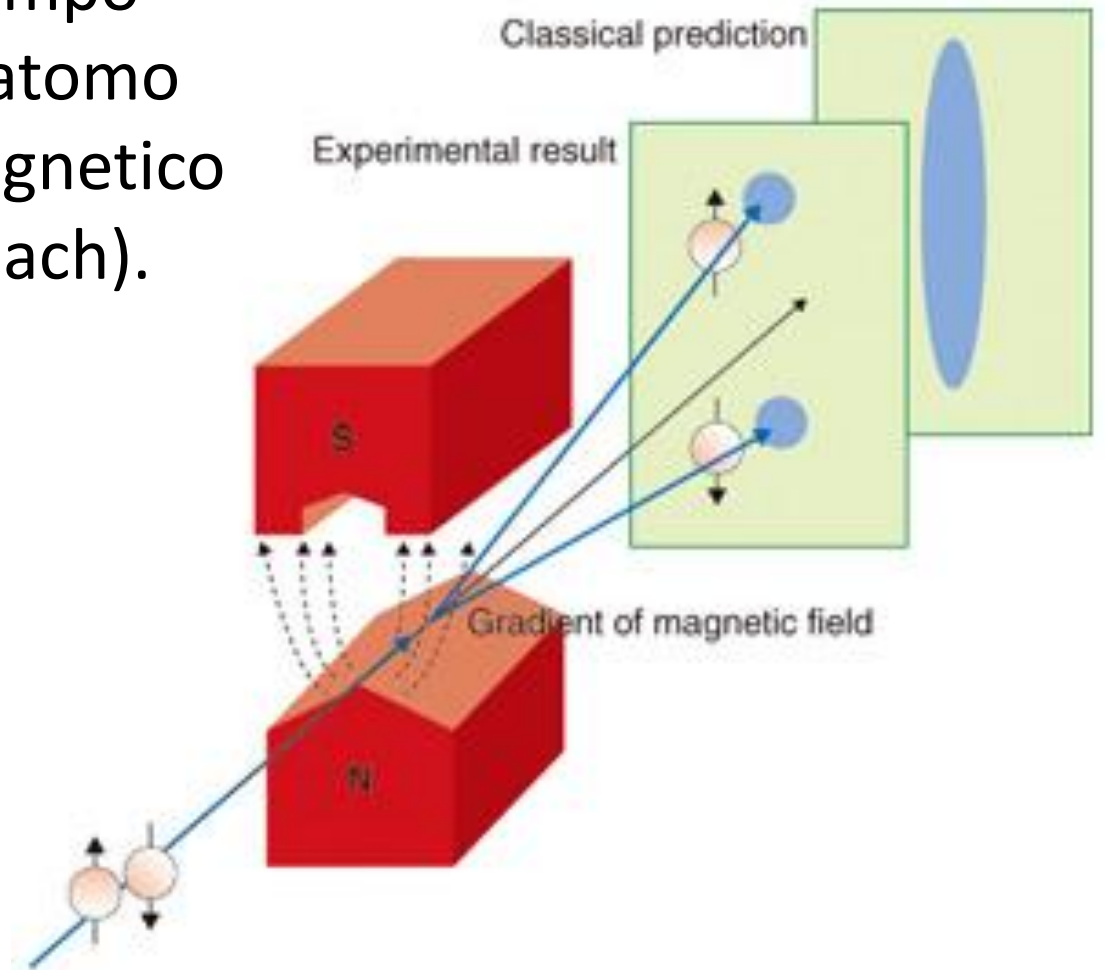
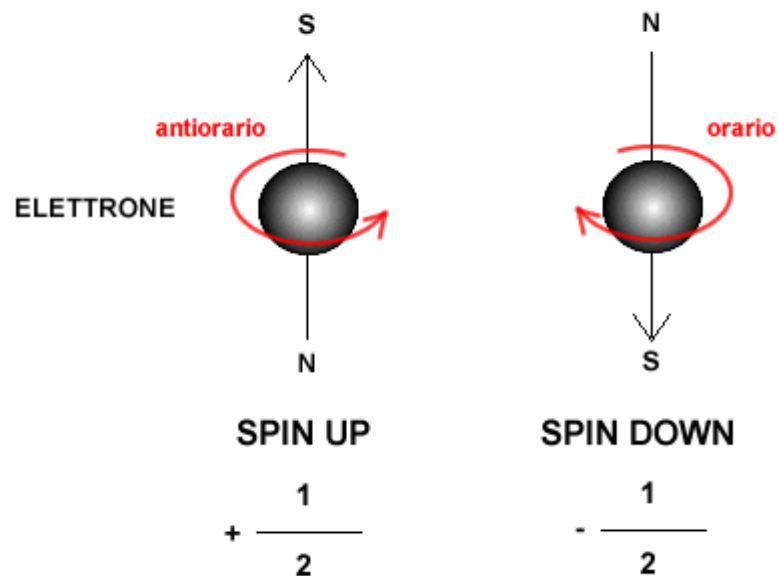


- Altro esempio: particella nella scatola (di massa m). Ad una dimensione, a ciascuno autostato, con numero quantico n , è associata l'energia:

- $$E = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2a^2 m}$$



- Altro esempio: lo spin dell'elettrone.
- Ci sono solo due autostati quindi è particolarmente semplice per essere descritto. Anche qui ai due stati può essere associato un osservabile fisico, ad esempio l'energia in presenza di un campo magnetico esterno, o la traiettoria di un atomo ad un elettrone (neutro) in un campo magnetico non uniforme (esperimento di Stern-Gerlach).

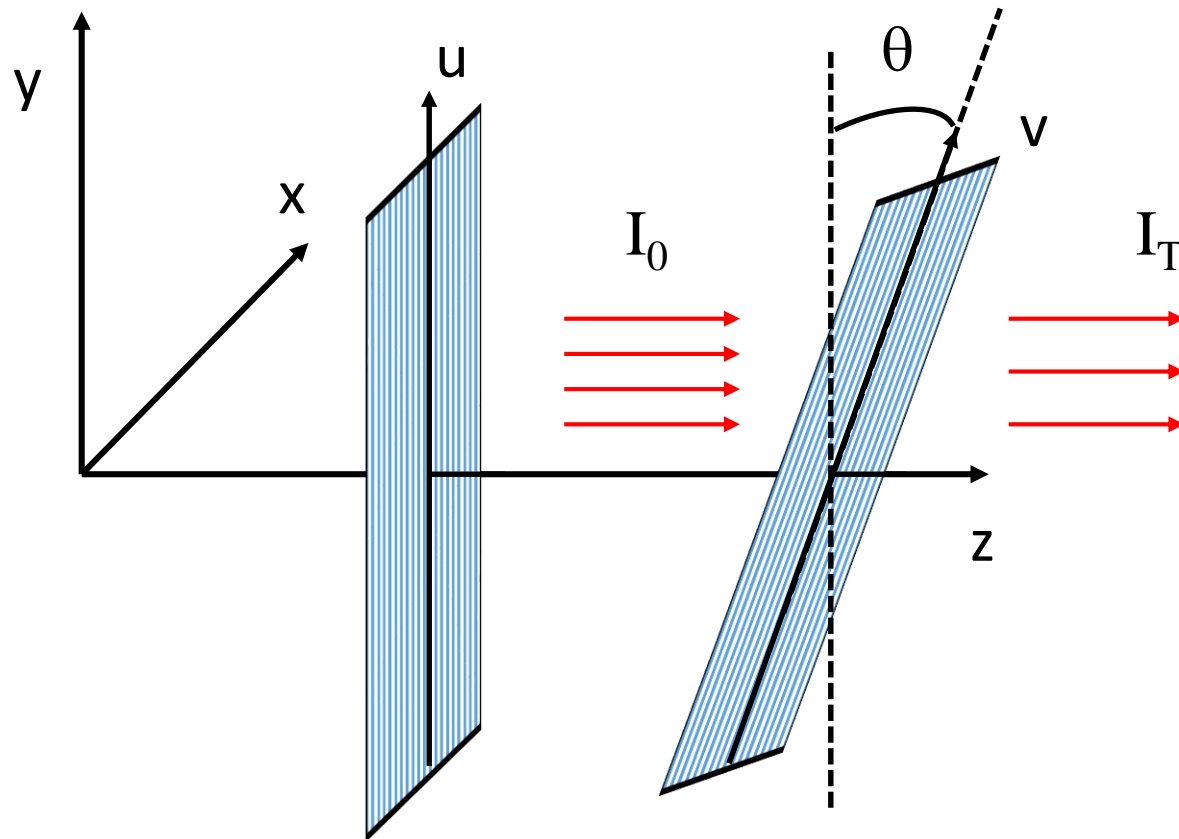


- L'idea è di utilizzare un sistema analogo ma ancora più semplice per quanto riguarda la facilità di osservazione sperimentale.
- Utilizziamo la polarizzazione della luce come grandezza fisica quantizzata:
- La luce, ovvero un'onda elettromagnetica, è la manifestazione di un'oscillazione. Segue quindi la quantizzazione dell'oscillatore armonico. Ne consegue che l'ampiezza è quantizzata, e così la sua energia: $E = (n + 1/2)\hbar\omega$.

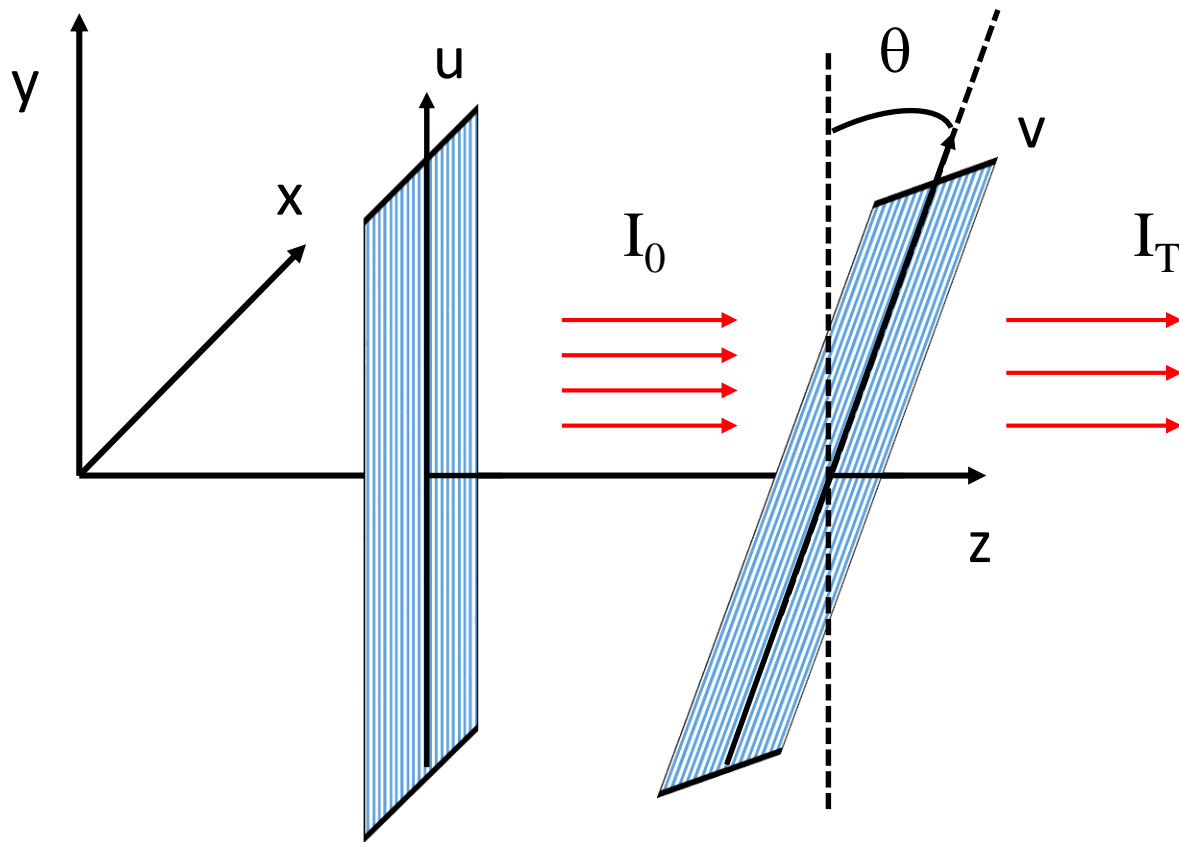
Chiamo fotone l'entità elementare (quanto). Un fascio di luce di frequenza angolare ω sarà quindi composto da n fotoni.

- Il problema che sorge è: posso definire la polarizzazione del singolo fotone? In questo modo avrei una perfetta analogia con lo spin dell'elettrone. Un fascio di luce e la sua polarizzazione da una parte (la polarizzazione di ogni singolo fotone); un fascio di elettroni ed il loro spin dall'altra.

- Come si «prepara» luce polarizzata: coppia di polaroid e legge di Malus. Il primo polaroid ha la funzione di imporre una polarizzazione, il secondo quella di «analizzare» è quindi di individuarla.







Legge di Malus:

$$I_T = I_0 \cos^2 \theta$$

Se $\theta = 0^\circ$, $I_T = I_0$

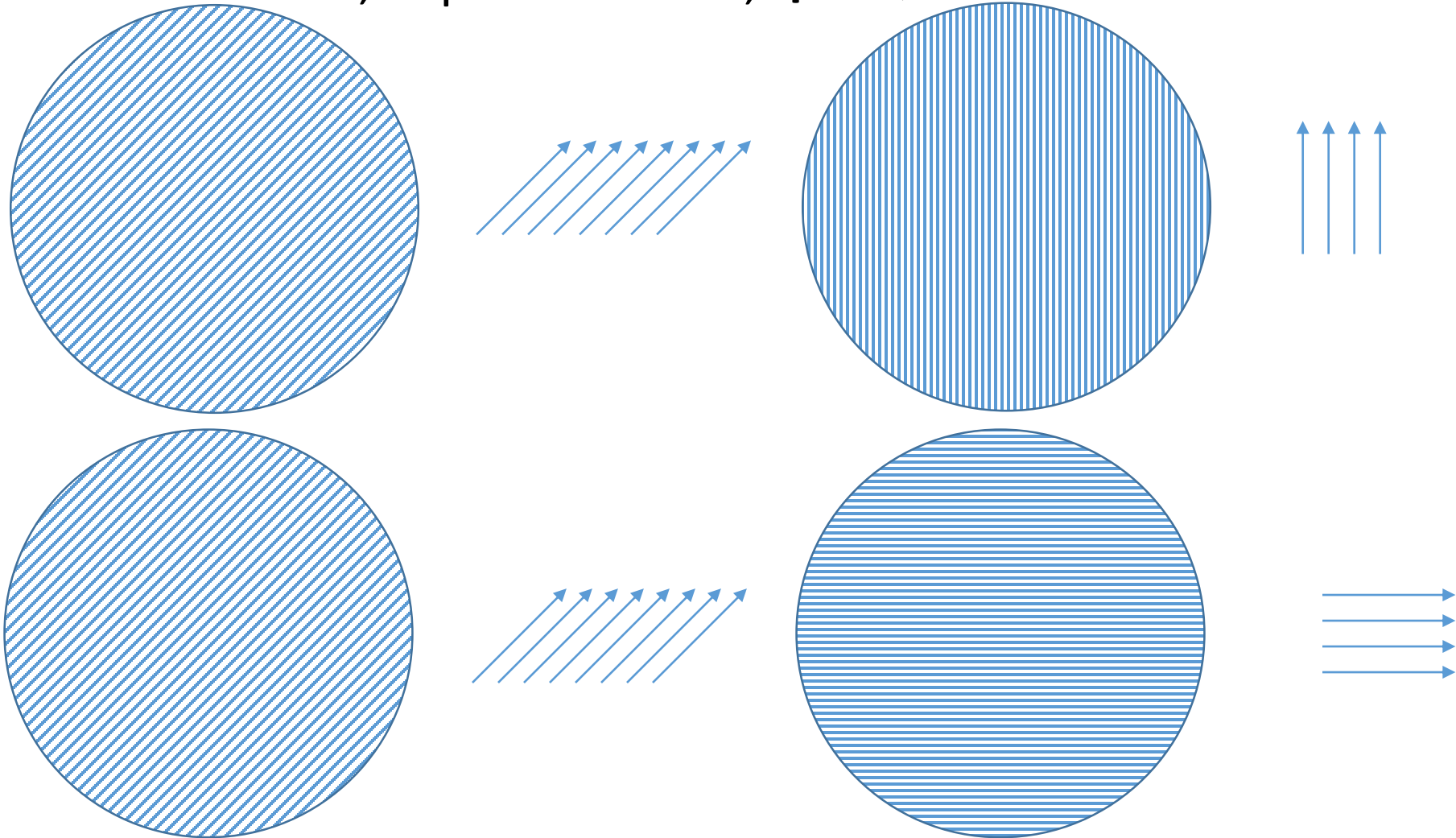
Se $\theta = 90^\circ$, $I_T = 0$

Se $\theta = 45^\circ$, $I_T = \frac{1}{2} I_0$

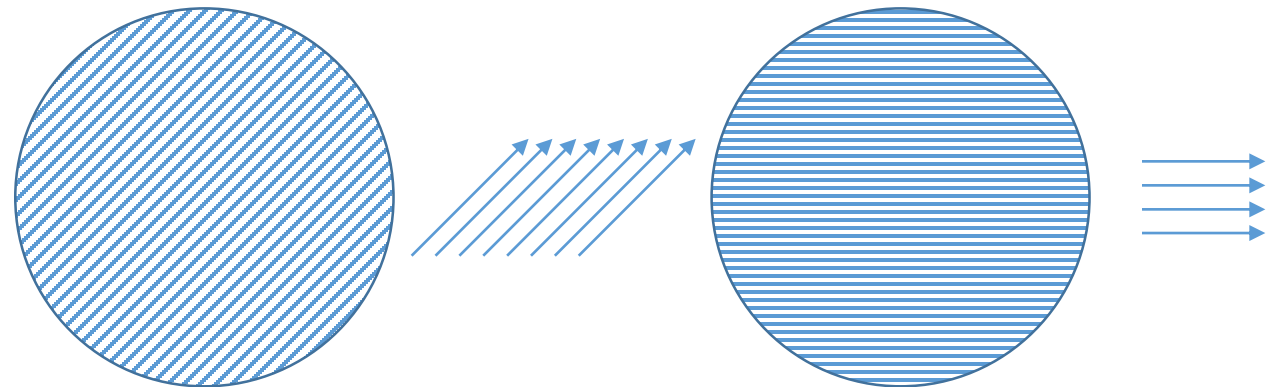
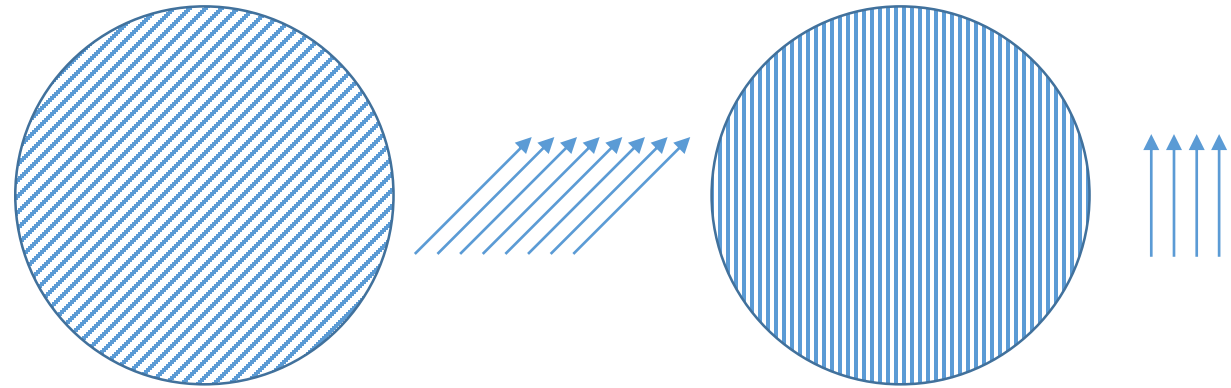
Consideriamo gli stati macroscopici di polarizzazioni: orizzontale (\hat{x}), verticale (\hat{y}), inclinata di 45° ($\hat{x} + \hat{y}$), o di qualunque altro angolo.

Immaginiamo questo esperimento:

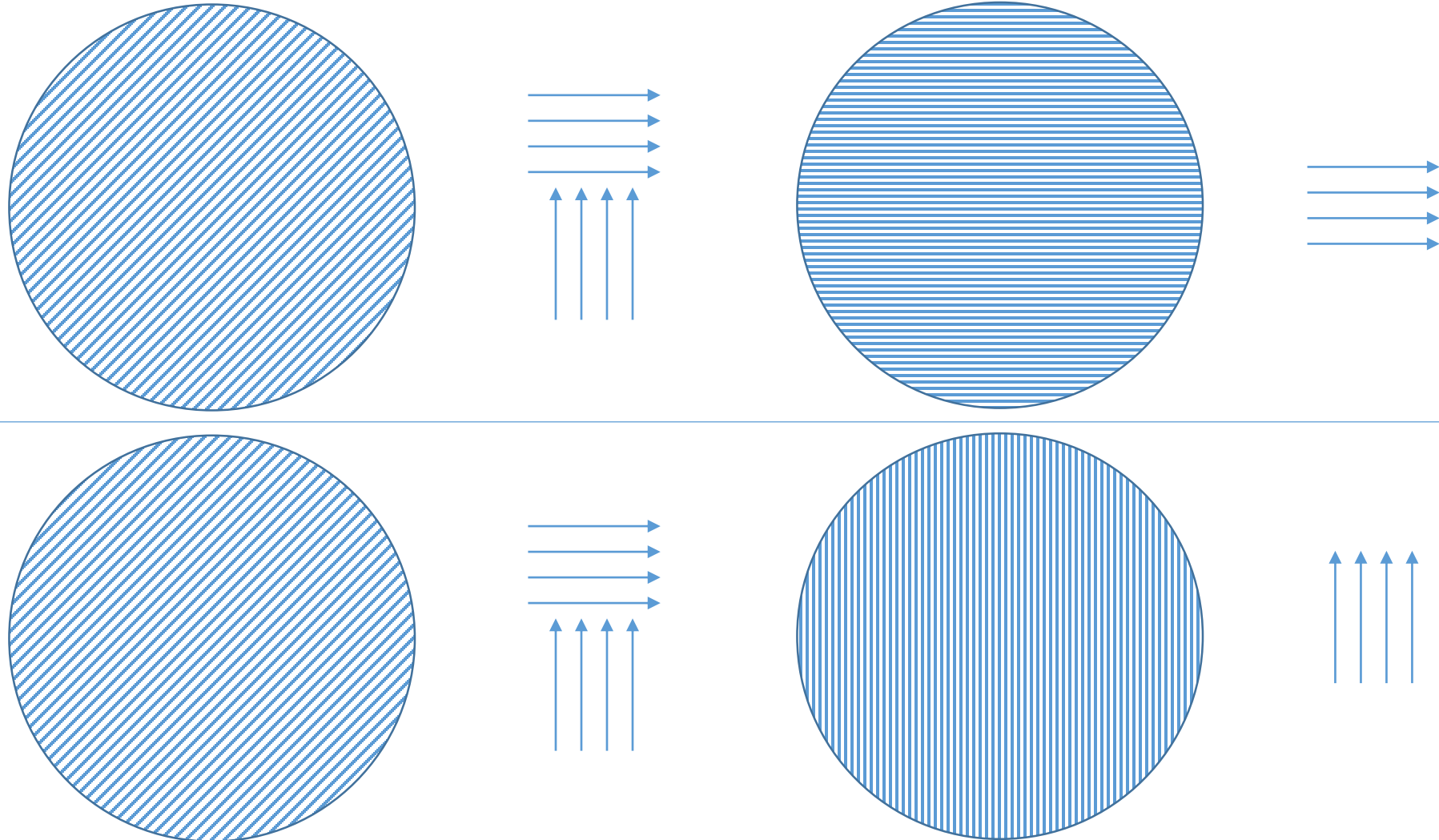
- Il primo polaroid produce luce polarizzata a 45° ($\mathbf{u} = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}$). Se il 2° polarizzatore è orientato verticalmente ($\mathbf{v} = \hat{\mathbf{y}}$), o orizzontalmente ($\mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}}$), ovvero $\theta = \pm 45^\circ$, la legge di Malus prevede intensità dimezzata. La proprietà finale sarà, rispettivamente, \uparrow o \rightarrow .



- Immaginiamo di inviare luce di bassissima intensità sul sistema dei 2 polarizzatori. Ovvero di inviare «un fotone per volta».
- Ciò che osserviamo allora è interpretato nel seguente modo: Ciascun fotone che fuoriesce dal primo polaroid ha il 50% di probabilità di attraversare il 2° polaroid, se questo è orientato in una delle due direzioni.



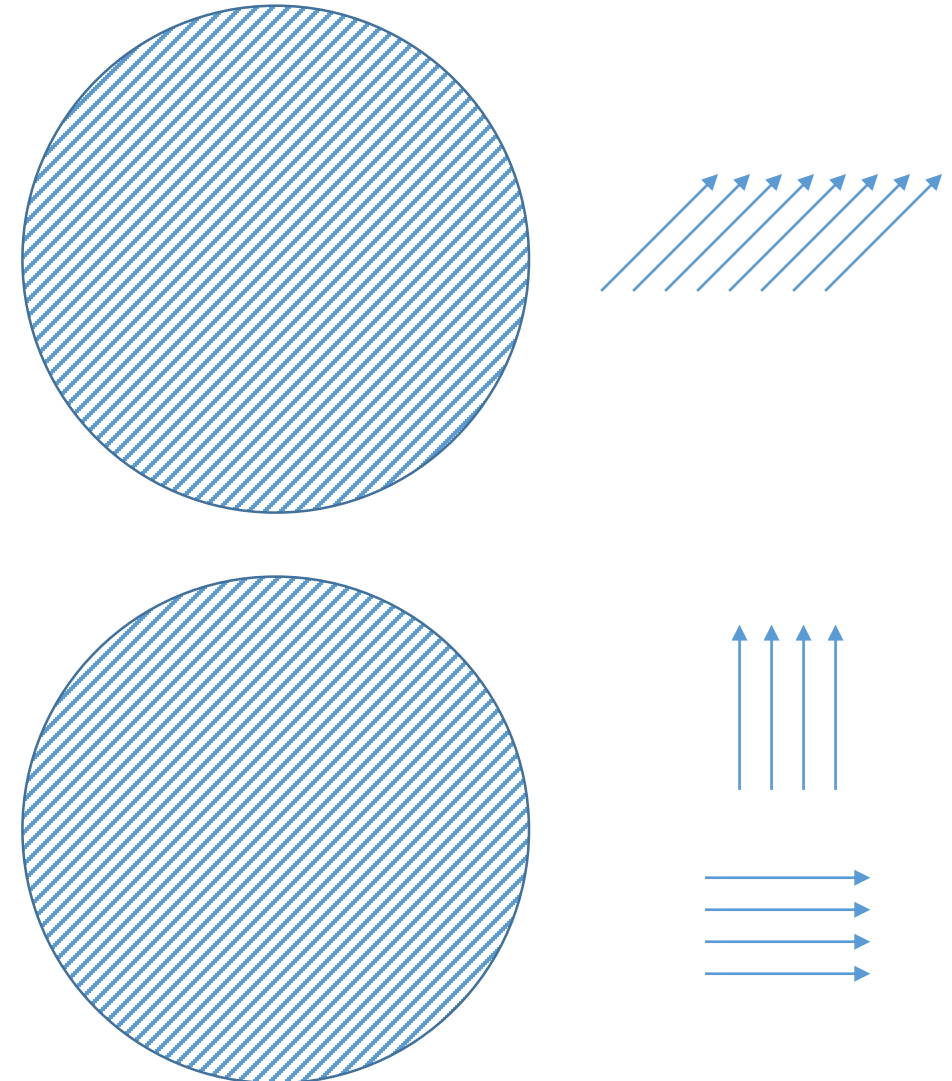
- Si può fare la seguente ipotesi: lo stato $\hat{x} + \hat{y}$ è costituito dal 50% di fotoni con proprietà \rightarrow e 50% di fotoni con proprietà \uparrow ;
L'effetto del 2° polarizzatore (orizzontale o verticale) sarebbe di selezionare i fotoni con la proprietà «giusta».



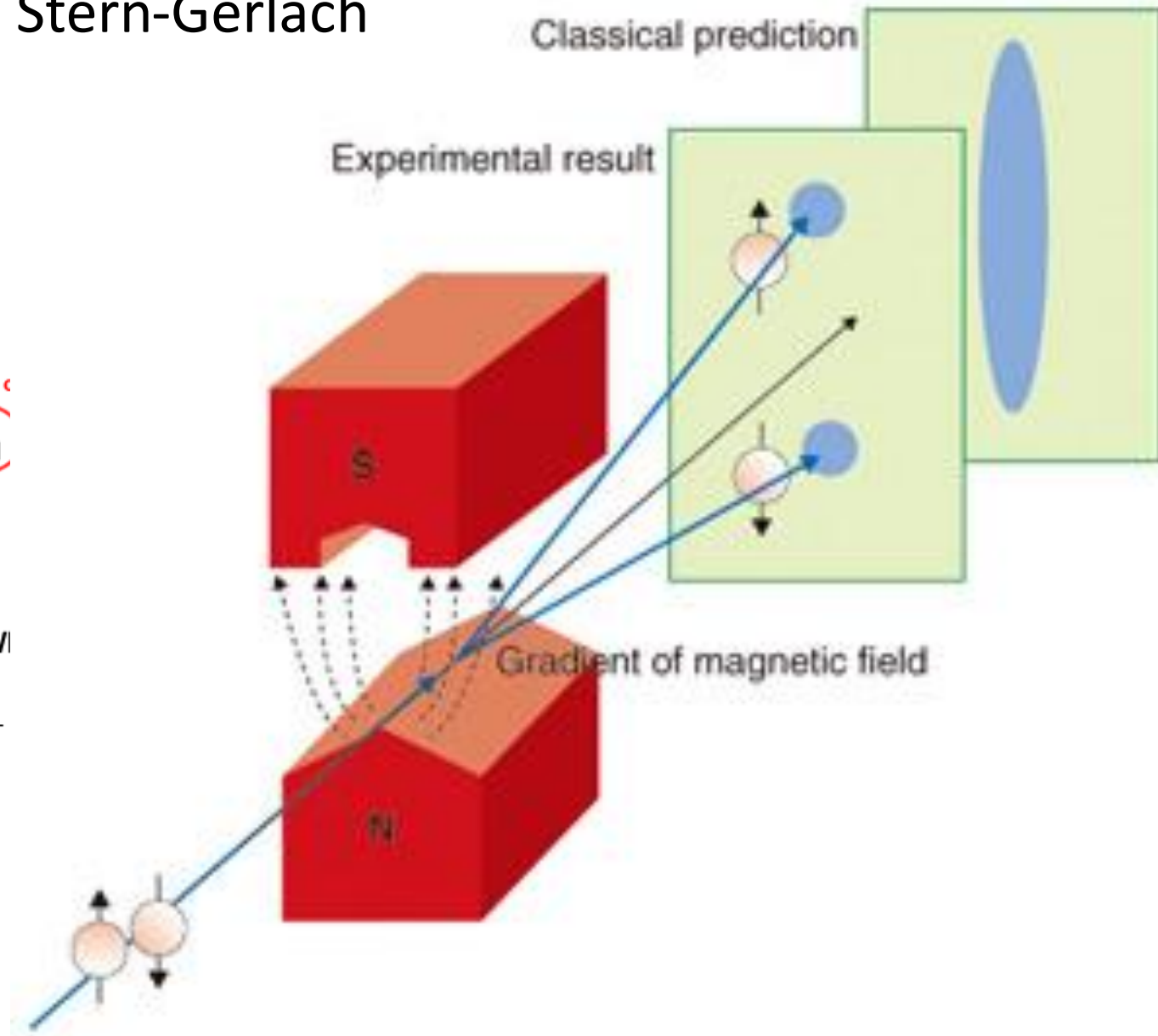
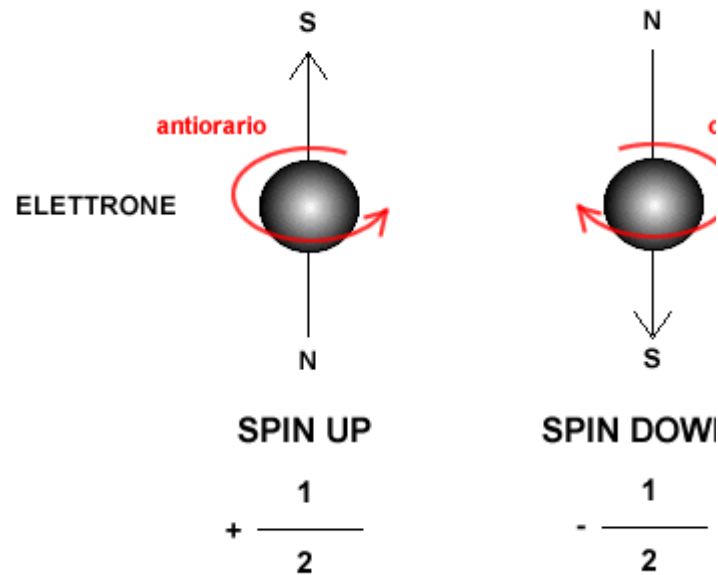
La domanda è: lo stato a 45% ($\hat{x} + \hat{y}$) può essere descritto come una miscela di stati \hat{x} e \hat{y} cioè di fotoni con proprietà \rightarrow e fotoni con proprietà \uparrow , anziché fotoni con proprietà \nearrow ?

Ovvero, applico il cosiddetto **principio di sovrapposizione**:

- considero luce ottenuta con un polaroid orientato a 45° rispetto all'orizzontale, NON come un insieme di fotoni con la proprietà di polarizzazione indicata con \nearrow ,
- ma come una miscela di stati \hat{x} e \hat{y} cioè di fotoni con proprietà \rightarrow e fotoni con proprietà \uparrow , in egual numero.

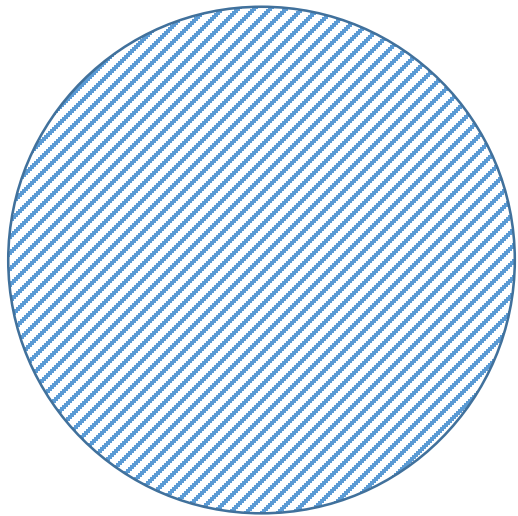


L'interpretazione è simile a quella per lo spin nell'esperimento di Stern-Gerlach

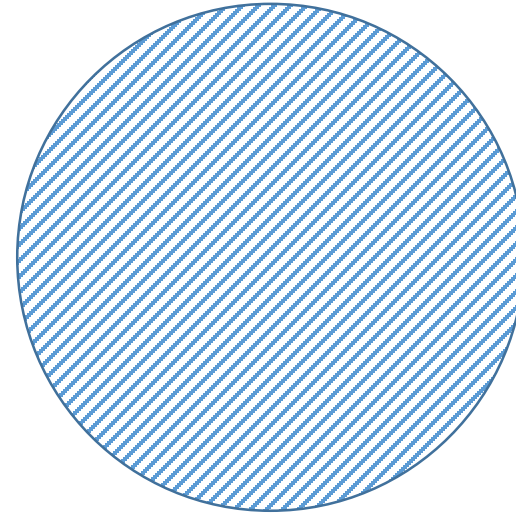
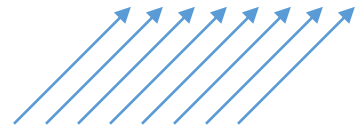


- Tuttavia è facile vedere che l'ipotesi è sbagliata **se eseguiamo il seguente esperimento:**

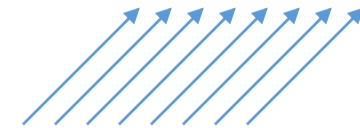
Se faccio passare fotoni polarizzati $\hat{x} + \hat{y}$ attraverso un polarizzatore orientato a 45° so che tutta la luce passerà senza attenuazione.



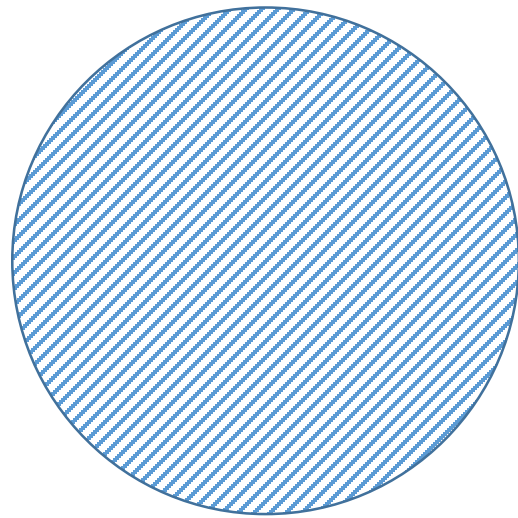
1° polarizzatore



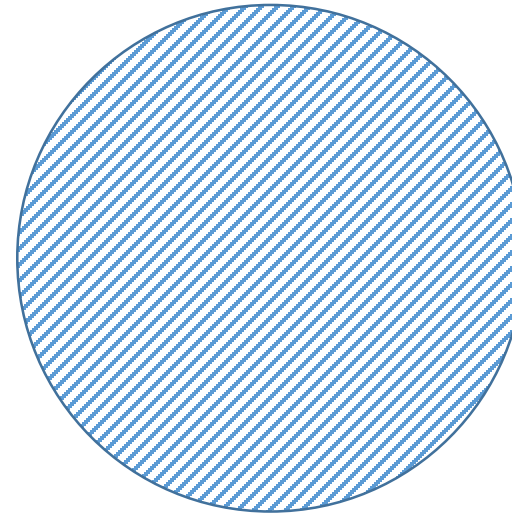
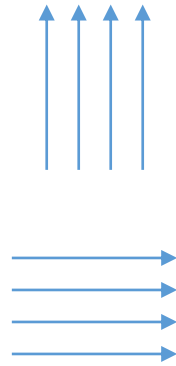
2° polarizzatore



- Viceversa, secondo l'ipotesi precedente avrei dimezzamento perché entrambe le frazioni statistiche dei fotoni (50% con proprietà \rightarrow e 50% con proprietà \uparrow) vedrebbero dimezzata la loro probabilità di passare.



1° polarizzatore

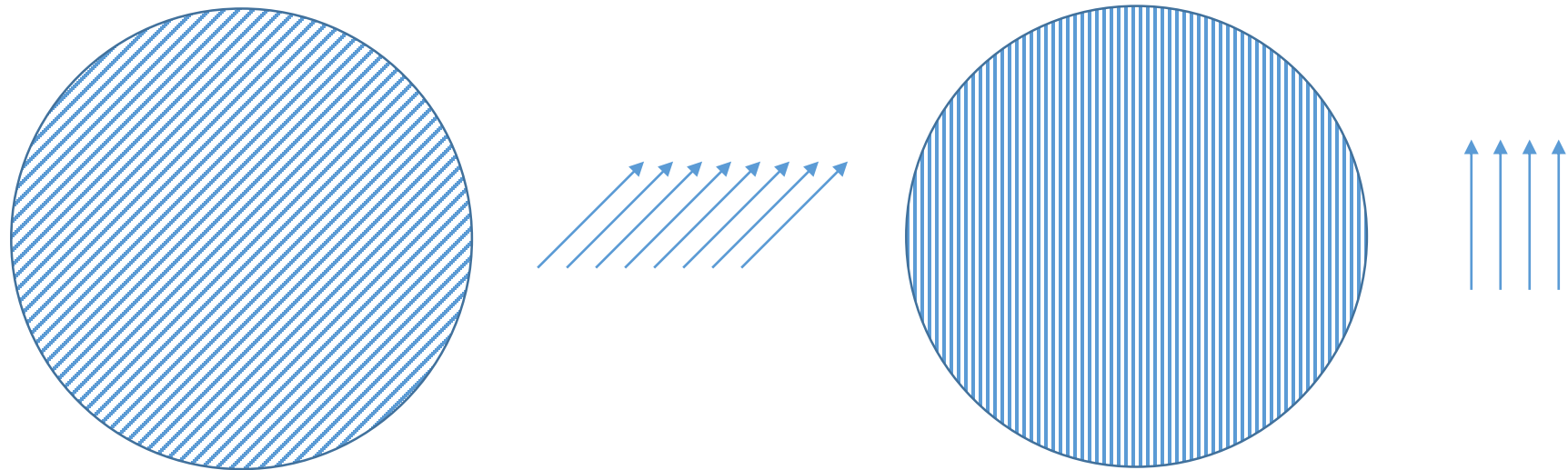


2° polarizzatore

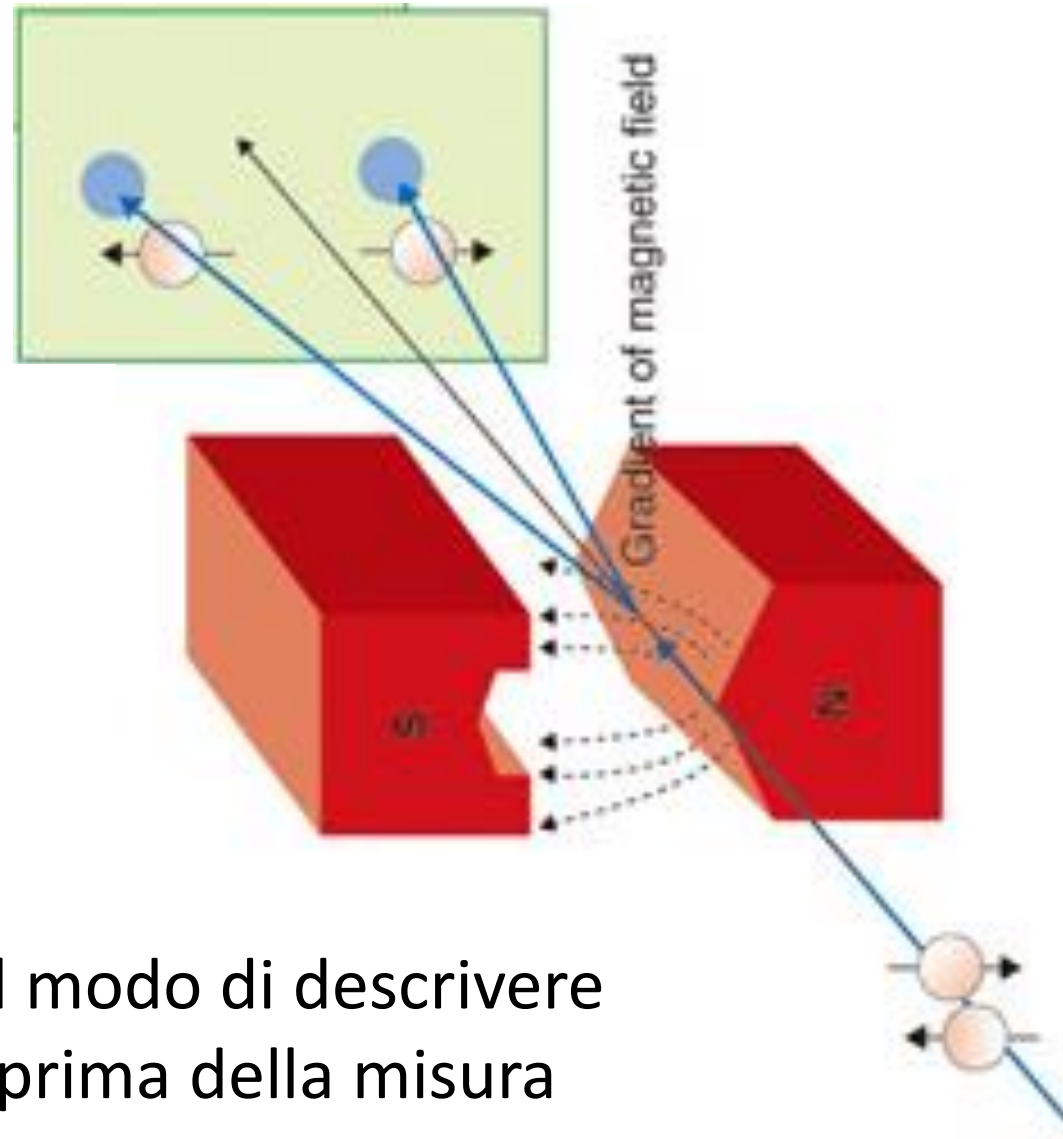


Quindi le proprietà \uparrow , \rightarrow , \nearrow , sono distinte e incompatibili.

- Allora, i fotoni, polarizzati $\hat{x} + \hat{y}$, prima di attraversare il 2° polaroid, sono caratterizzati TUTTI dallo stato \nearrow e dunque sono identici tra loro.
- Come mai, però, non si comportano allo stesso modo? Cioè, perché il 50% passa e l'altro 50% non passa attraverso un polaroid «orizzontale» o «verticale», se è vero che essi sono tra loro identici?

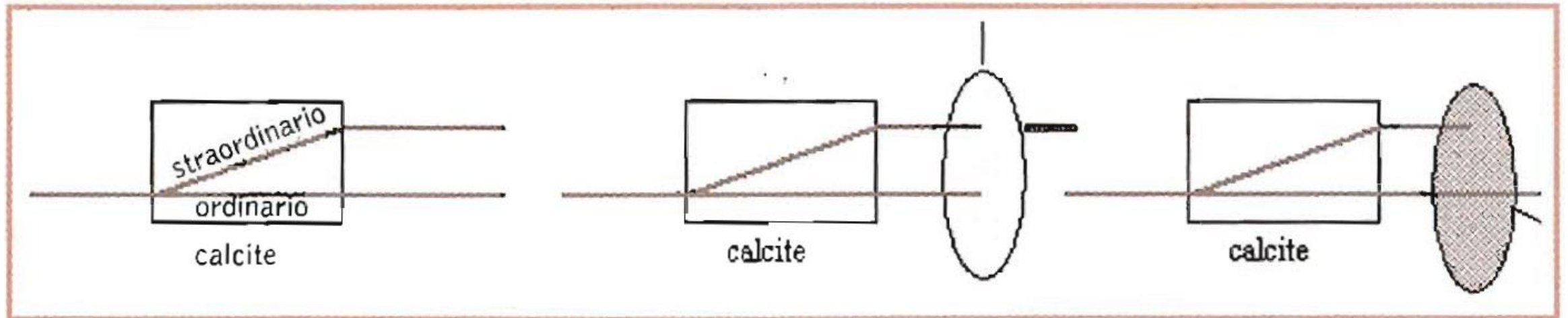


- Evidentemente, a seconda dell'orientazione del 2° polaroid cambia la descrizione che dobbiamo fare per definire lo stato dei fotoni tra i due polaroid.
- Questo è il concetto di **indeterminismo quantistico** e l'influenza che la misura stessa ha sullo stato del sistema. Prima della misura non posso definire se un particolare fotone ha una polarizzazione \hat{x} , \hat{y} , oppure $\hat{x} + \hat{y}$. Solo dopo aver fatto interagire l'insieme di fotoni con il 2° polaroid (ovvero effettuando la misura), ne conosco lo stato e la probabilità corrispondente.

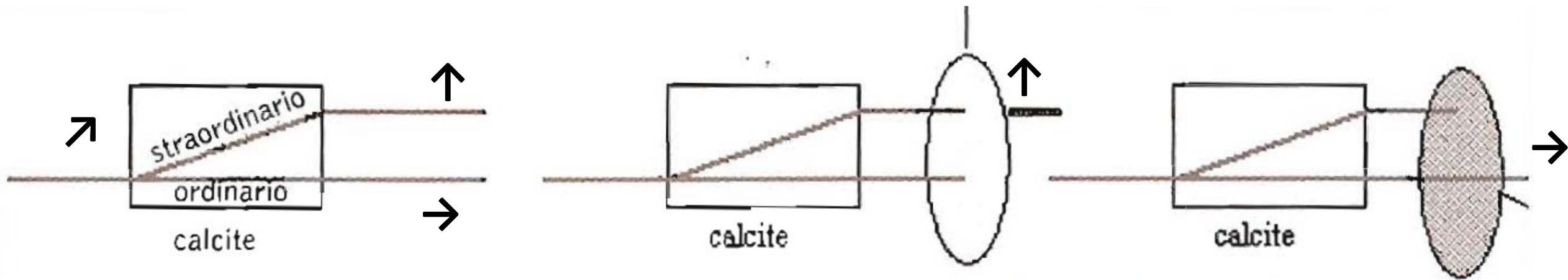


La misura influenza il modo di descrivere lo stato del sistema, prima della misura stessa.

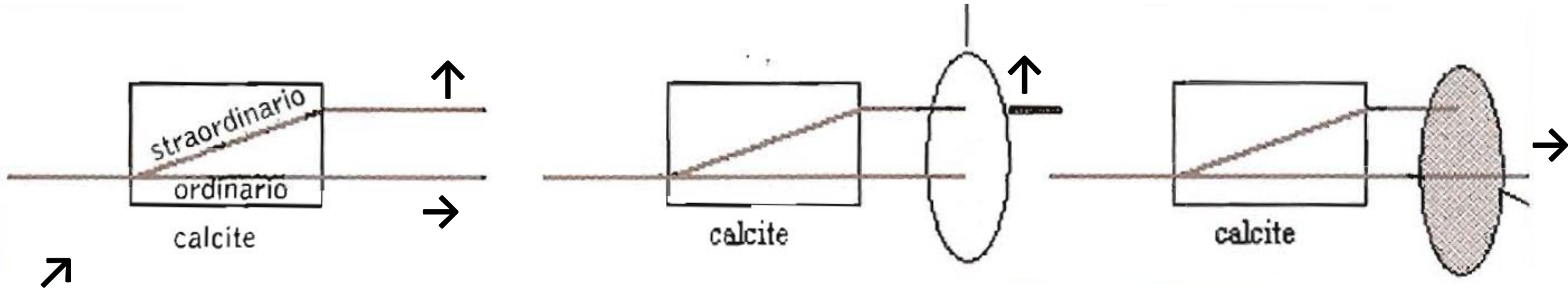
- Si può fare un'analisi simile utilizzando i cristalli birifrangenti. Sono cristalli anisotropi in cui polarizzazioni distinte hanno velocità di propagazione diverse e quindi indici di rifrazione diversi. Una polarizzazione rispetta le normali leggi della rifrazione (raggio ordinario), quella perpendicolare dà luogo a rifrazione distinta. Le loro traiettorie vengono dunque separate.



Si orienta il cristallo (di calcite) in modo che il raggio ordinario corrisponda a polarizzazione \hat{x} , quello straordinario a polarizzazione \hat{y} . Se parto da polarizzazione $\hat{x} + \hat{y}$, i due fasci uscenti sono costituiti da fotoni negli stati \uparrow e \rightarrow , rispettivamente, in numero uguale.

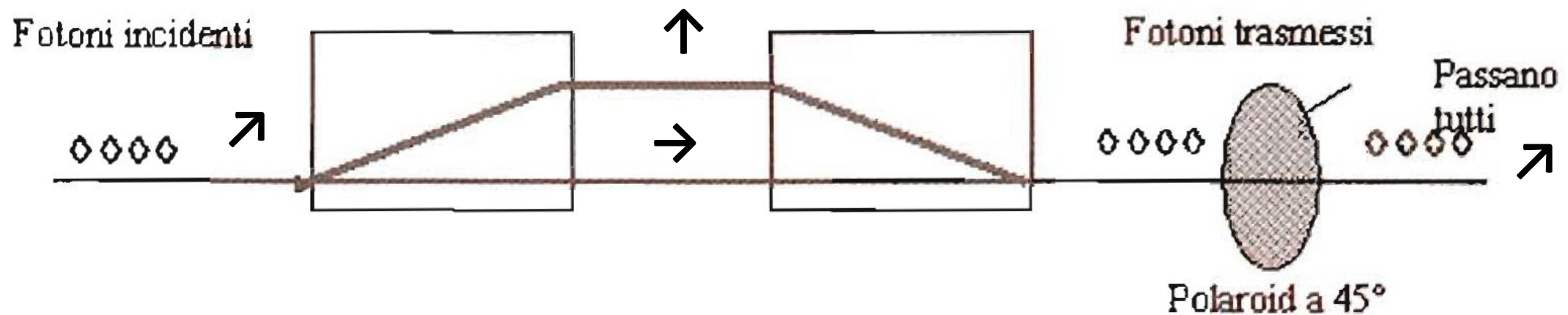




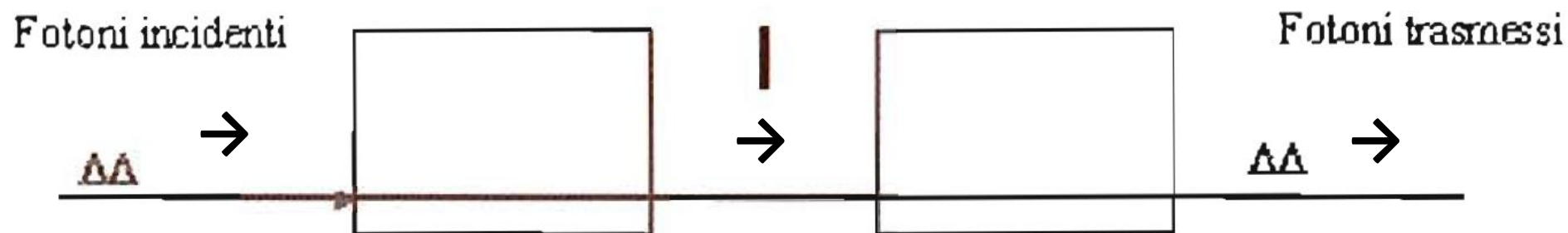


- Se immagino di mandare sul cristallo **un fotone per volta**, questo nel 50% dei casi percorrerà una traiettoria e nel 50% l'altra.
- Lo stato di polarizzazione è identificato dalla traiettoria.

- Ora, metto un secondo cristallo orientato in maniera «inversa», cioè in modo da ricombinare i fasci.
- Se il fascio incidente è polarizzato a 45° , lo sarà anche quello finale trasmesso: tutti i fotoni hanno proprietà ↗. Tuttavia, tra i due cristalli, i fasci separati (ordinario e straordinario) hanno proprietà ↑ e →, rispettivamente.

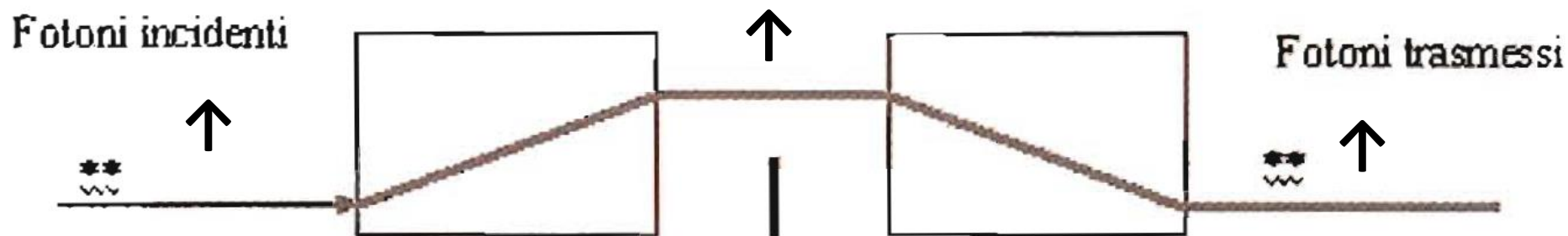


- Le proprietà di polarizzazione e l'esatta traiettoria percorsa tra i due cristalli posso verificarle, ad esempio, bloccando con uno schermo una delle due traiettorie.



Si trasmette solo il fascio ordinario e...

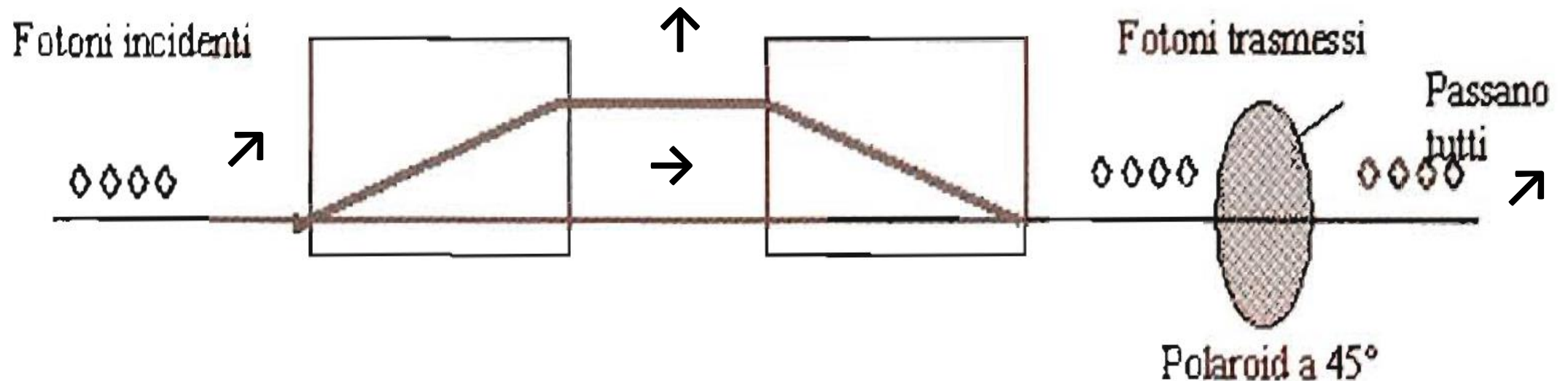
...non viene influenzato dalla presenza di uno schermo sul cammino del fascio straordinario



Si trasmette solo il fascio ordinario e...

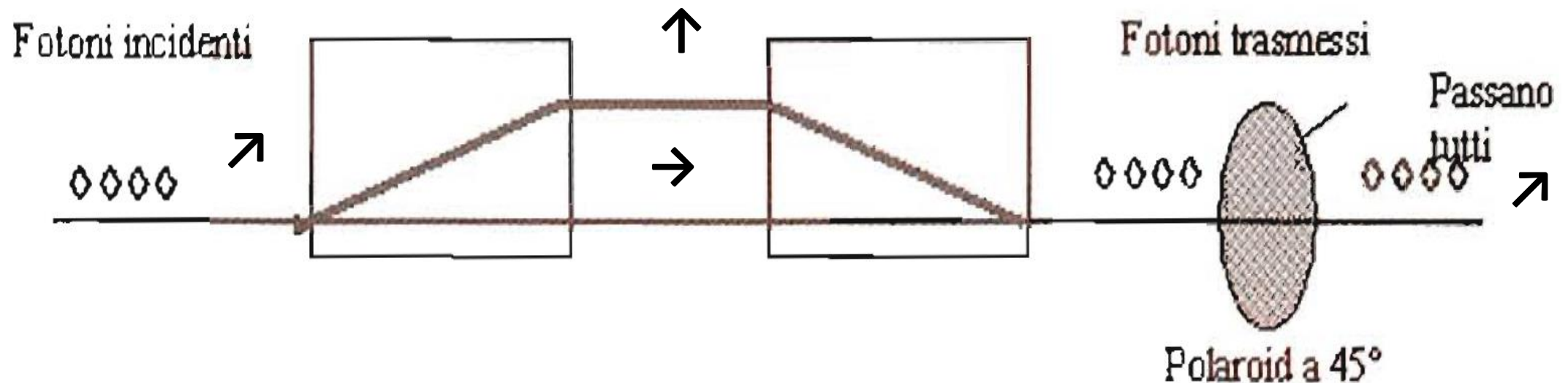
...non viene influenzato dalla presenza di uno schermo sul cammino del fascio straordinario

- Quindi, si possono associare univocamente le due traiettorie con le due polarizzazioni.
- Se inizialmente il fascio ha polarizzazione $\hat{x} + \hat{y}$, anche quello finale ha la stessa polarizzazione: Mettendo un polaroid finale a 45°, ho che tutto il fascio «ricombinato» viene trasmesso. Non ho alcuna attenuazione.
- Tra i due cristalli, invece, i fasci separati (ordinario e straordinario) hanno proprietà \uparrow e \rightarrow , rispettivamente.



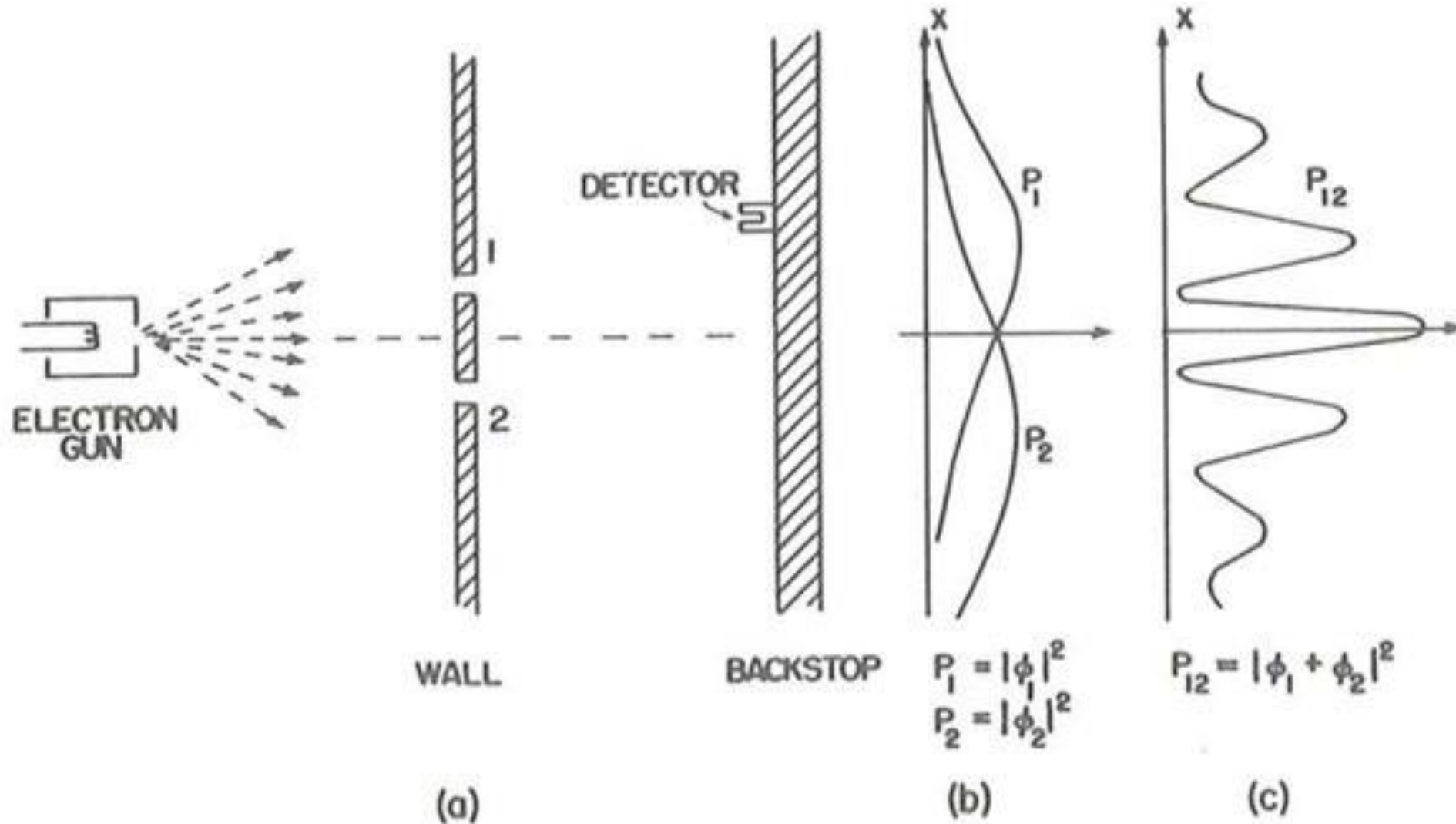
- Questo è incompatibile con l'idea che dopo il primo cristallo metà fotoni siano nello stato \uparrow e metà nello stato \rightarrow e che mantengano tale identità nell'interazione con il secondo cristallo. Ovvero, il singolo fotone (\uparrow o \rightarrow dopo il primo cristallo), non è identificabile con un singolo fotone finale (nello stato \nearrow).
- Lo stato di sovrapposizione $\hat{x} + \hat{y}$, descrive fotoni la cui traiettoria tra i due cristalli non è identificabile.

Non si può attribuire al fotone una traiettoria definita.



- Questa situazione è perfettamente analoga al problema della diffrazione di elettroni dovuta a due fenditure.
- Secondo la meccanica quantistica gli elettroni, oltre che essere particelle, hanno una natura ondulatoria. La lunghezza d'onda (De Broglie) è: $\lambda = h/p$.

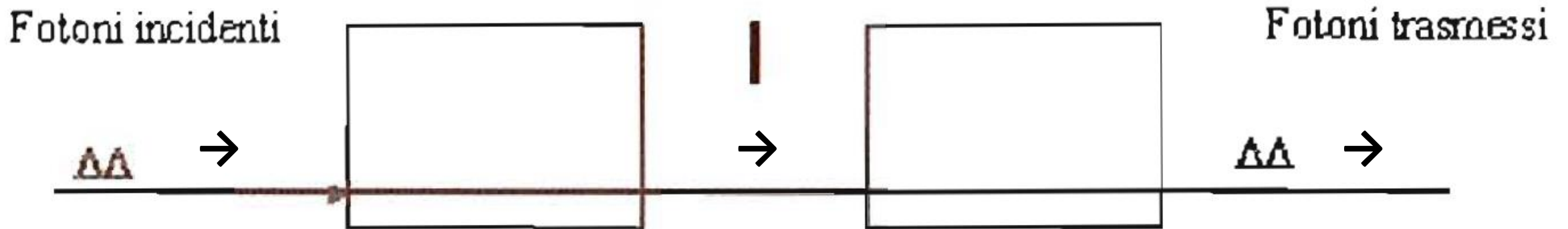
Pertanto un fascio di elettroni subisce diffrazione e interferenza quando incide su una coppia di fenditure.



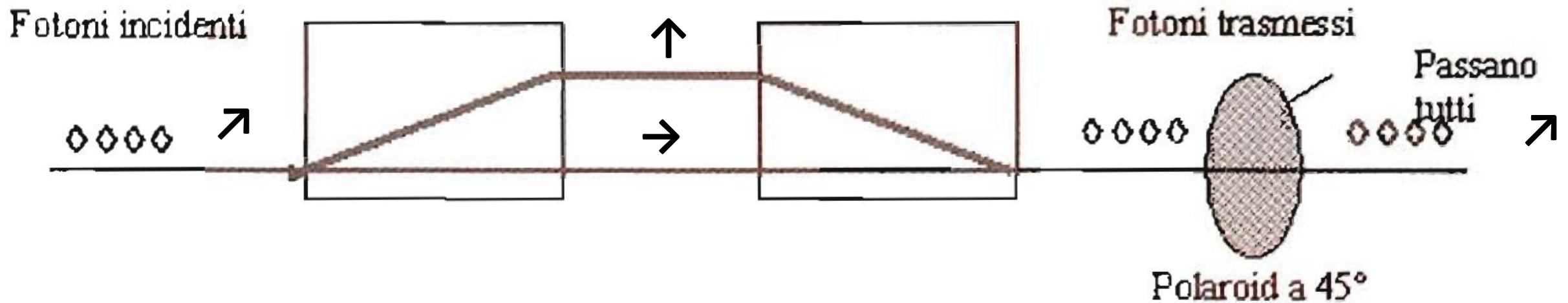
- P1 o P2 sono le intensità che vedrei se venisse chiusa la fenditura 2 o 1, rispettivamente. P12 è l'intensità data dall'interferenza.

- Tale fenomeno avviene anche se mando un elettrone per volta. C'è comunque interferenza. Vedo una figura diversa da quella che vedrei chiudendo l'una o l'altra fenditura.
- Quindi, anche se mando un elettrone per volta, **NON POSSO DIRE QUALE SIA STATA LA SUA TRAIETTORIA, OVVERO ATTRAVERSO QUALE FENDITURA È PASSATO.**

- L'indeterminismo quantistico è forse ancora più evidente nel seguente esperimento:
- Consideriamo il dispositivo precedente con il doppio cristallo di calcite.
- Inviando sul dispositivo luce polarizzata \hat{x} (pensiamo sempre di inviare bassa intensità, ovvero un fotone per volta), tutti i fotoni passano. Si tratta di fotoni nello stato \rightarrow . La presenza di uno schermo sul fascio straordinario non influenza il risultato.



- Se invece mandiamo luce polarizzata a 45° ovvero $\hat{x} + \hat{y}$, con un polaroid finale orientato a 45° vediamo che tutti i fotoni «passano».

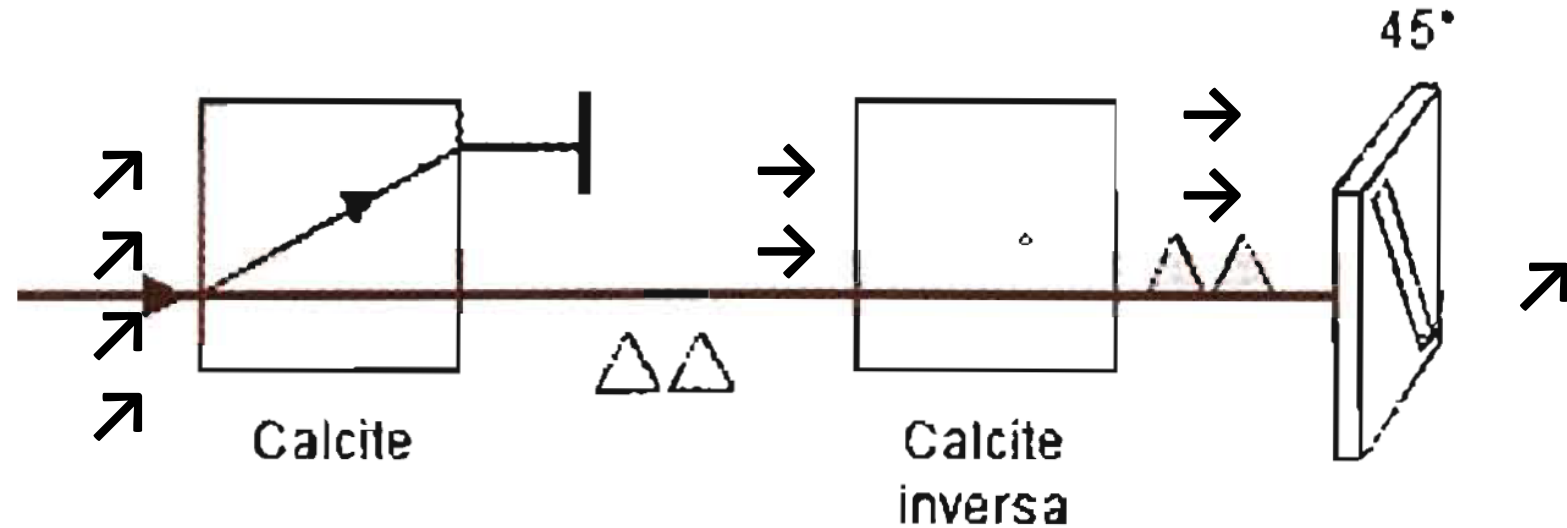


- Mi domando: «Qual è la traiettoria dei fotoni che osservo, nel tratto tra i due cristalli?»

Sono portato a supporre che metà percorrono una traiettoria e metà l'altra.

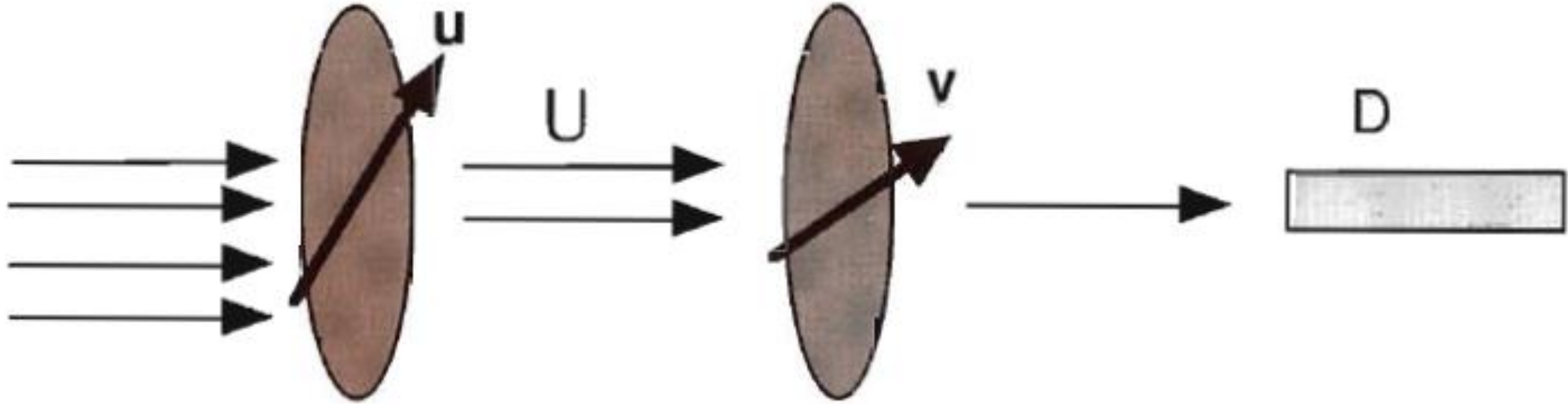
- Se reintroduciamo lo schermo sul raggio straordinario, apparentemente solo metà dei fotoni viene intercettato.

Eppure solo il 25% dei fotoni fuoriesce a destra del dispositivo totale!



- Metà degli altri fotoni (quelli \rightarrow del fascio ordinario tra i due cristalli) pur non incontrando lo schermo, non fuoriescono dal dispositivo, ma risentono dello schermo posto sul raggio straordinario. Il loro stato finale \nearrow , che è uno stato di sovrapposizione $\hat{x} + \hat{y}$, risente dello schermo posto sull'altra traiettoria.
- Anche nell'esperimento degli elettroni e delle due fenditure abbiamo visto che un singolo elettrone che attraversa una fenditura risente dell'eventuale presenza di uno schermo che blocca l'altra fenditura.

- Proviamo a formalizzare i concetti fin qui elaborati:
Torniamo alla nostra coppia di polarizzatori



- Il primo polarizzatore definisce lo stato dei fotoni; il secondo polarizzatore, con il rivelatore (detector) D , ha la funzione di determinarlo.
- Matematicamente, il vettore unitario (versore) \hat{u} determina lo stato dei fotoni da esaminare; variando il versore \hat{v} si hanno informazioni sul sistema di fotoni U .
- Se θ è l'angolo tra \hat{u} e \hat{v} , si ha $I_D = I_U \cos^2 \theta$

- La probabilità $P(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$ che un fotone di U sia rivelato da D è dunque:

$$P(D) = P(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) = \frac{I_D}{I_U} = \cos^2 \theta = (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}})^2$$

$\hat{\mathbf{u}}$ determina univocamente le proprietà del sistema (fotoni). Quindi la polarizzazione è rappresentata da un vettore in uno spazio 2-dim.

$\hat{\mathbf{v}}$ è lo stato del fotone SE ha attraversato il 2° polarizzatore. Tale evento è evidenziato dal rivelatore D. L'apparato di misura (2° polaroid) ha indotto una transizione da $\hat{\mathbf{u}}$ a $\hat{\mathbf{v}}$, con probabilità di transizione $(\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}})^2$.

Poiché $\hat{\mathbf{u}}$ è un vettore di uno spazio vettoriale 2-dim, posso scrivere:

$$\hat{\mathbf{u}} = A_1 \hat{\mathbf{x}} + A_2 \hat{\mathbf{y}}; \text{ con } A_1 \text{ e } A_2 \text{ ampiezze.}$$

$$\text{Poiché } \hat{\mathbf{u}} \text{ è unitario, } \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 1 \Leftrightarrow A_1^2 + A_2^2 = 1.$$

Questo è il principio di sovrapposizione: se $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ sono stati del sistema, lo è anche $\hat{\mathbf{u}}$.

$$\text{Le due ampiezze sono ottenute da: } A_1 = \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{x}}; A_2 = \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{y}}$$

$$\text{Ovvero: } A_1^2 = (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 = P(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{x}}); A_2^2 = (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{y}})^2 = P(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{y}})$$

$$P(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{x}}) = A_1^2 \quad ; \quad P(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{y}}) = A_2^2$$

A_1^2 e A_2^2 sono le probabilità di transizione da $\hat{\mathbf{u}}$ a $\hat{\mathbf{x}}$ e da $\hat{\mathbf{u}}$ a $\hat{\mathbf{y}}$, cioè probabilità che il fotone attraversi il 2° polarizzatore se questo è orientato come $\hat{\mathbf{x}}$ o come $\hat{\mathbf{y}}$, rispettivamente: probabilità statistiche che un fotone $\hat{\mathbf{u}}$ abbia proprietà $\hat{\mathbf{x}}$ o $\hat{\mathbf{y}}$.

• Torniamo a : $P(D) = P(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) = \cos^2 \theta = (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}})^2$

Sostituendo: $\hat{\mathbf{u}} = A_1 \hat{\mathbf{x}} + A_2 \hat{\mathbf{y}}$, si ottiene:

$$P(D) = (A_1 \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{v}} + A_2 \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{v}})^2 = A_1^2 (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{v}})^2 + A_2^2 (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{v}})^2 + 2A_1 A_2 (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{v}})(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{v}})$$

Ovvero: $P(D) = \underbrace{P(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{x}})}_{\text{}} \underbrace{P(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}})}_{\text{}} + \underbrace{P(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{y}})}_{\text{}} \underbrace{P(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{v}})}_{\text{}} + 2A_1 A_2 (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{v}})(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{v}})$

% di fotoni
 $\hat{\mathbf{u}}$ con
proprietà $\hat{\mathbf{x}}$

Probabilità che un
fotone con
proprietà $\hat{\mathbf{x}}$ sia
rivelato (cioè
attraversi il 2°
polarizzatore)

% di fotoni
 $\hat{\mathbf{u}}$ con
proprietà $\hat{\mathbf{y}}$

Probabilità che un
fotone con
proprietà $\hat{\mathbf{x}}$ sia
rivelato (cioè
attraversi il 2°
polarizzatore)

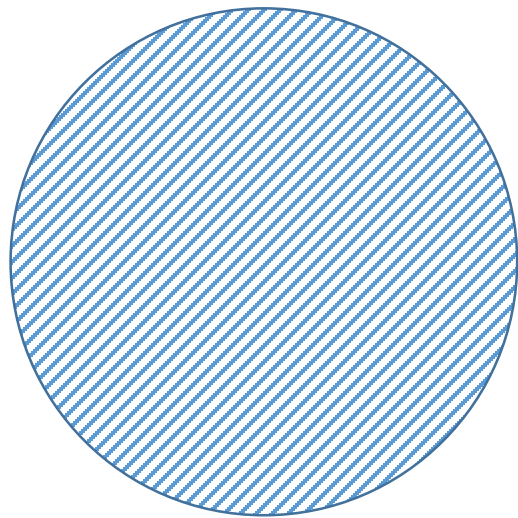
- $P(D) = P(\hat{u}, \hat{x})P(\hat{x}, \hat{v}) + P(\hat{u}, \hat{y})P(\hat{y}, \hat{v}) + 2A_1A_2(\hat{x} \cdot \hat{v})(\hat{y} \cdot \hat{v})$

I primi due termini corrispondono all'aspettativa classica del principio di sovrapposizione.

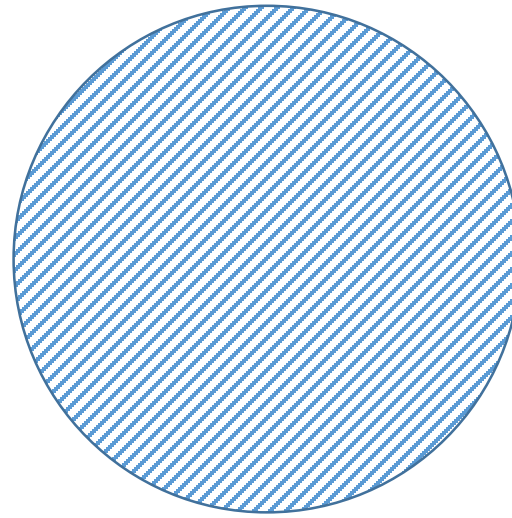
Il 3° è un termine di «interferenza» tra i due stati di sovrapposizione, ed è una peculiarità della meccanica quantistica.

- Il sistema, dopo il 1° polarizzatore, NON è semplicemente un insieme costituito dai due sottoinsiemi disgiunti, con proprietà \rightarrow e \uparrow , rispettivamente, secondo una visione classica.
- Il principio di sovrapposizione in meccanica quantistica non è analogo a quello in meccanica classica.
- Rivediamo gli esempi fatti alla luce del formalismo appena ricavato:

Considerare luce polarizzata a 45° , ovvero $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y}$ come un insieme di fotoni al 50% nello stato \hat{x} e 50% nello stato \hat{y} ($A_1^2 = A_2^2 = 1/2$) faceva giungere al paradosso per cui, se anche $\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y}$, solo metà intensità è rivelata.



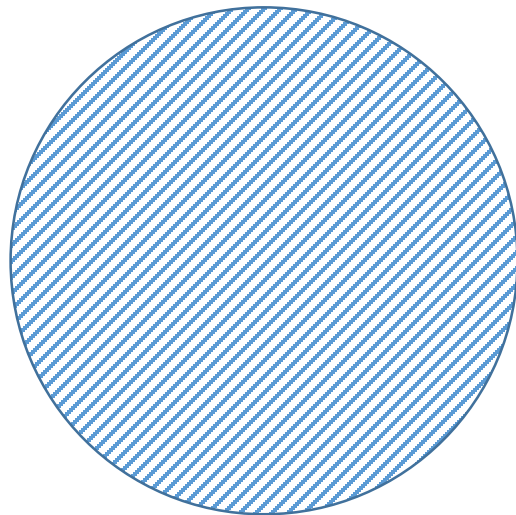
1° polarizzatore



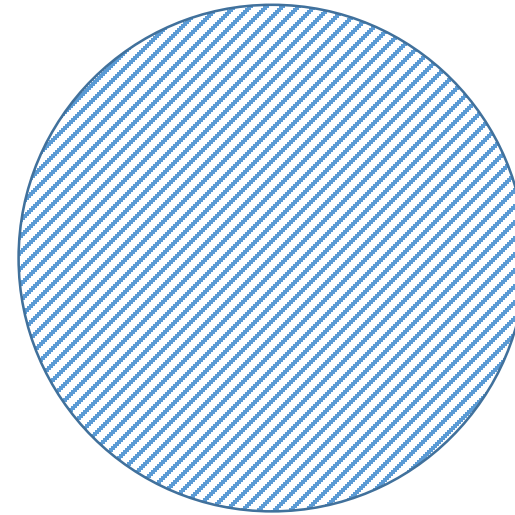
2° polarizzatore

Tuttavia, questa è la visione «classica» che corrisponde ai soli primi due termini della relazione:

$$P(D) = A_1^2(\hat{x} \cdot \hat{v})^2 + A_2^2(\hat{y} \cdot \hat{v})^2 + 2A_1A_2(\hat{x} \cdot \hat{v})(\hat{y} \cdot \hat{v})$$



1° polarizzatore



2° polarizzatore

E' il terzo termine $2A_1A_2(\hat{x} \cdot \hat{v})(\hat{y} \cdot \hat{v})$

che ristabilisce il corretto risultato:

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y} \quad ; \quad A_1^2 = A_2^2 = \frac{1}{2}$$

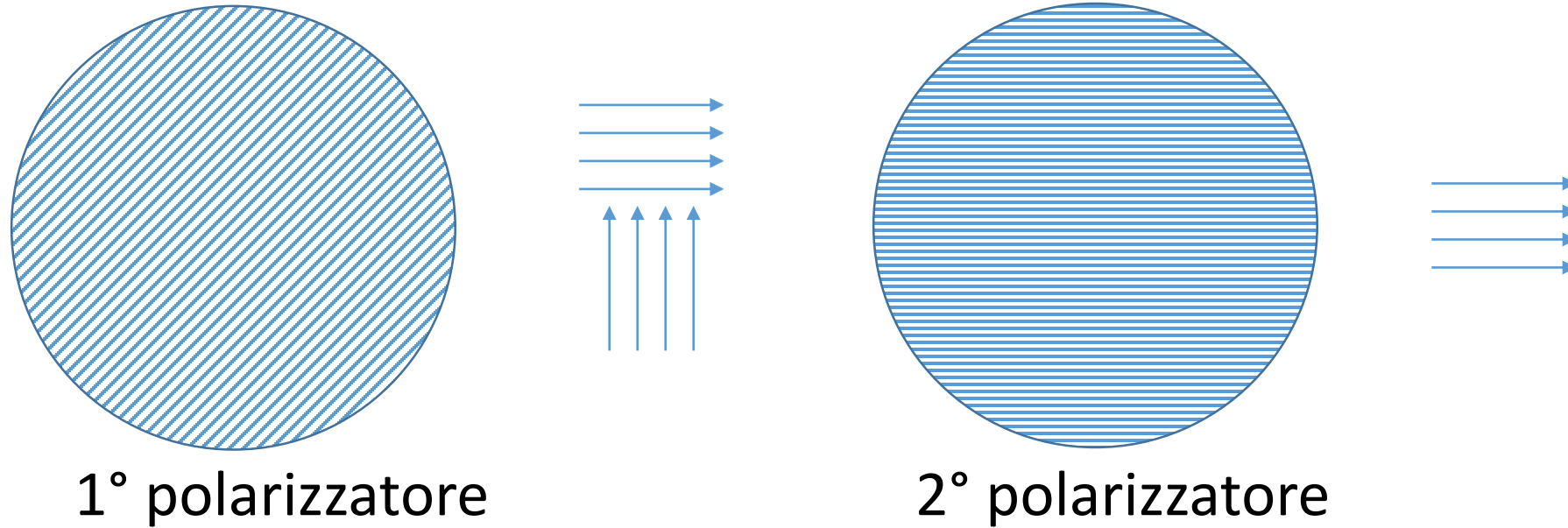
$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y}.$$

$$P(D) = A_1^2(\hat{x} \cdot \hat{v})^2 + A_2^2(\hat{y} \cdot \hat{v})^2 + 2A_1A_2(\hat{x} \cdot \hat{v})(\hat{y} \cdot \hat{v}) = \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}_{\text{termini «classici»}} + \underbrace{2 \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}_{\text{termine quantistico di «interferenza»}} = 1$$

termini
«classici»

termine
quantistico di
«interferenza»

Viceversa, non ho alcun paradosso se il 2° polarizzatore è, ad esempio, orizzontale:

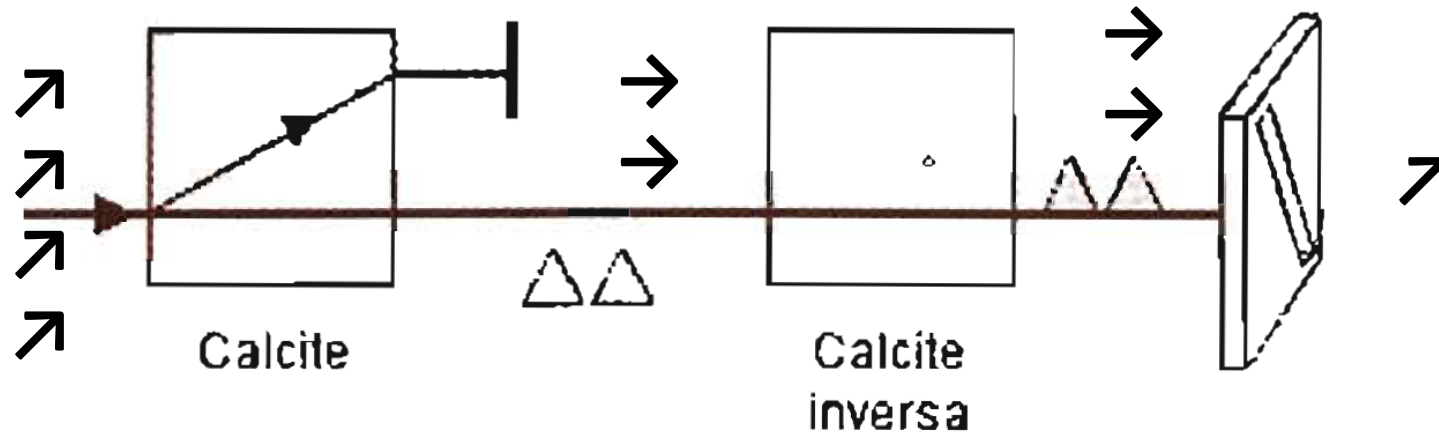


In tal caso, $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{y}}$; $A_1^2 = A_2^2 = \frac{1}{2}$ $\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{x}}$

E solo il 1° termine della relazione sopravvive:

$$P(D) = A_1^2(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{v}})^2 + A_2^2(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{v}})^2 + 2A_1A_2(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{v}})(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2}$$

Non ho alcun contributo dal termine quantistico di «interferenza».



Lo stesso vale nell'ultima osservazione fenomenologica considerata:

Se blocco il fascio straordinario, annullo A_2 . Quindi sopravvive solo il 1° termine, non ho il contributo del termine di interferenza:

$$P(D) = A_1^2 (\hat{x} \cdot \hat{v})^2 + A_2^2 (\hat{y} \cdot \hat{v})^2 + 2A_1 A_2 (\hat{x} \cdot \hat{v})(\hat{y} \cdot \hat{v}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Altrimenti, senza lo schermo sul fascio straordinario, il computo dei 3 termini fornisce lo stesso risultato del caso precedente, ovvero $P(D) = 1$, con il contributo del 3° termine di «interferenza».

- La relazione

$$P(D) = A_1^2 (\hat{x} \cdot \hat{v})^2 + A_2^2 (\hat{y} \cdot \hat{v})^2 + 2A_1 A_2 (\hat{x} \cdot \hat{v})(\hat{y} \cdot \hat{v})$$

può essere riscritta se anche il versore \hat{v} viene espresso come:

$$\hat{v} = A'_1 \hat{x} + A'_2 \hat{y}.$$

Allora:

$$P(D) = A_1^2 A'^2_1 + A_2^2 A'^2_2 + 2A_1 A_2 A'_1 A'_2$$

Uno stato fisico è individuato da una serie di ampiezze che permettono di determinare le proprietà del sistema. L'espressione fornisce la probabilità di transizione da uno stato all'altro. Tale transizione è indotta dall'esecuzione della misura stessa o comunque dall'interazione tra il sistema ed un agente esterno.

- Negli esempi fatti, le 2 ampiezze A_1 e A_2 definiscono lo stato del sistema come una sovrapposizione di due stati ortogonali \hat{x} e \hat{y} e siamo quindi in uno spazio a 2 dimensioni. Più in generale, potrebbe esserci un numero maggiore di stati ortogonali. Allora un generico stato \hat{u} diventa sovrapposizione di un numero di stati ortogonali \hat{x}_i , con una sequenza di ampiezze $\{A_i\} \equiv (A_1, A_2, A_3, \dots)$, dove A_i^2 è la probabilità di trovare lo stato generico \hat{u} con la proprietà \hat{x}_i .
- La probabilità di transizione da uno stato all'altro (per esempio indotta dalla misura stessa) sarà:
- $$P(D) = \sum_i A_i^2 A'_i{}^2 + \sum_{i,j} A_i A'_i A_j A'_j.$$
- Il primo termine ha un'analogia «classica»; il secondo termine rappresenta, al solito, l'«interferenza» quantistica.

Operatori lineari e osservabili fisiche

Ogni osservabile fisica in meccanica quantistica è associata ad un operatore lineare.

Vediamo cosa sono gli operatori lineari da un punto di vista puramente matematico. Consideriamo l'operatore $\hat{O} = \mathbf{a} \mathbf{b} \cdot$.

L'operatore è una funzione matematica che applicata ad un vettore dà un altro vettore. Se lo applico al vettore \mathbf{c} , ad esempio, ottengo:

$$\hat{O}\mathbf{c} = \mathbf{a} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$$

Consideriamo ora:

$\hat{O} = \lambda_1 \mathbf{a} \mathbf{a} \cdot + \lambda_2 \mathbf{b} \mathbf{b} \cdot$, dove \mathbf{a} e \mathbf{b} sono due versori ortonormali, cioè:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1; \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1; \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

• Applichiamo il nostro operatore ad un vettore generico \mathbf{c} :

$$\bullet \hat{\mathbf{O}}\mathbf{c} = (\lambda_1 \mathbf{a} \mathbf{a} \cdot + \lambda_2 \mathbf{b} \mathbf{b} \cdot) \mathbf{c} = \lambda_1 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} + \lambda_2 (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b}$$

L'operatore proietta il vettore \mathbf{c} lungo le direzioni ortogonali \mathbf{a} e \mathbf{b} , moltiplica le proiezioni per λ_1 e λ_2 , somma il risultato.

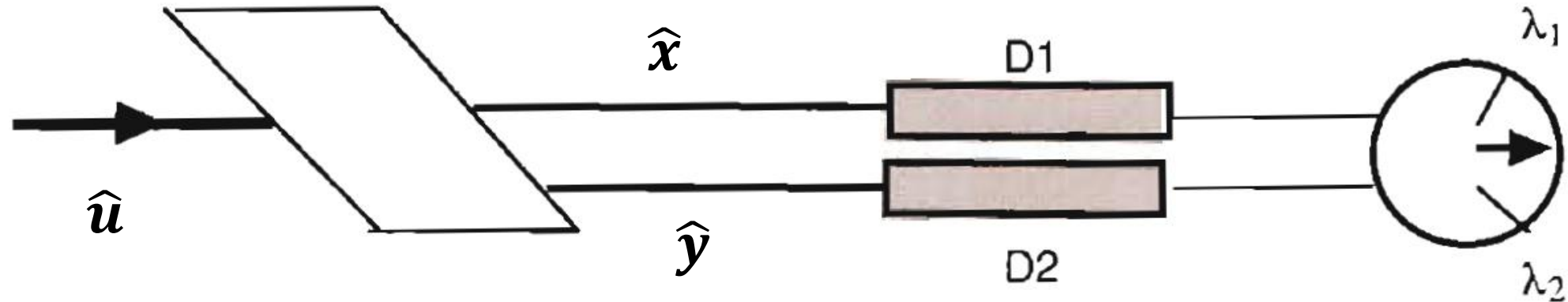
E' facile verificare che :

$$\hat{\mathbf{O}}\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a} ; \hat{\mathbf{O}}\mathbf{b} = \lambda_2 \mathbf{b} .$$

Ovvero applicando l'operatore ai due vettori \mathbf{a} o \mathbf{b} , si ottiene lo stesso vettore a meno di una costante.

Si dice che \mathbf{a} e \mathbf{b} sono autovettori dell'operatore $\hat{\mathbf{O}}$ con autovalori λ_1 e λ_2 .

Ora consideriamo il seguente esperimento in cui immaginiamo di inviare un fotone per volta sul dispositivo:



Il cristallo di calcite separa i due fasci, ordinario e straordinario, ed il display del doppio rivelatore può assumere solo una delle due posizioni λ_1 e λ_2 a seconda che il fotone sia arrivato sul rivelatore D_1 o D_2 . Quindi il risultato della misura è una variabile discreta.

Naturalmente, le probabilità di leggere λ_1 o λ_2 sono date da:

$$P(\lambda_1) = (\hat{u} \cdot \hat{x})^2 ; P(\lambda_2) = (\hat{u} \cdot \hat{y})^2 .$$

Se invio molti fotoni, il valore medio statistico che leggo sul rivelatore sarà:

$$\langle \lambda \rangle = \lambda_1 (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 + \lambda_2 (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{y}})^2$$

Che può essere riscritto come:

$$\langle \lambda \rangle = \hat{\mathbf{u}} \cdot [\lambda_1 (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{x}} + \lambda_2 (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{y}}] = \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{O}_\lambda \hat{\mathbf{u}} ;$$

$$\text{dove } \hat{O}_\lambda = \lambda_1 \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} \cdot + \lambda_2 \hat{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{y}} \cdot$$

L'operatore quindi permette di predire il valore dell'osservabile fisico corrispondente alla misura: descrive in maniera compatta l'apparato di misura.

Risultati:

1. Gli stati di un sistema fisico sono rappresentati da vettori
2. Le grandezze osservabili fisiche sono rappresentate da operatori
3. I valori medi degli operatori calcolati sugli stati, corrispondono alle quantità rilevate in una misura, ovvero alle quantità «classiche» che associamo a sistemi quantistici

FINE