

# *I quanti: corpo nero, effetto fotoelettrico, Compton*

Prof. Luca Lozzi

Dipartimento di Scienze Fisiche e Chimiche  
Università degli Studi dell'Aquila

Mail: [luca.lozzi@aquila.infn.it](mailto:luca.lozzi@aquila.infn.it); [luca.lozzi@univaq.it](mailto:luca.lozzi@univaq.it)

Web page: <http://www.dsfc.univaq.it/lozzi/>

Versione 01/01/2017

## *Dalla meccanica classica alla meccanica quantistica*

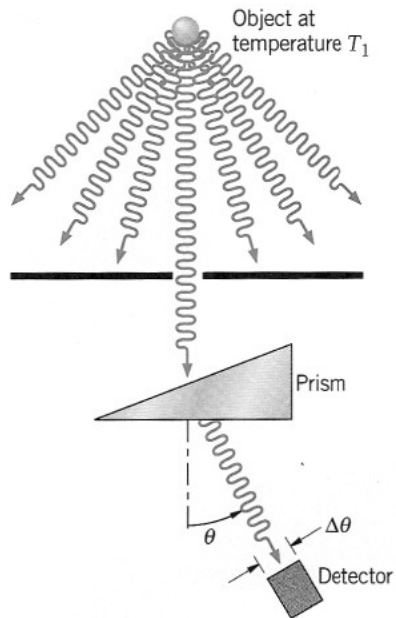
A metà del XIX secolo, con il consolidamento delle teorie sulla meccanica e con la teoria di Maxwell (1864) sull'unificazione della teoria dei campi elettrici e magnetici, sembrava che tutti i fenomeni fisici conosciuti potevano essere interpretati con le teorie note.

Alla fine del XIX una serie di esperimenti, i cui risultati non potevano essere spiegati con la meccanica classica, hanno portato alla nascita della meccanica quantistica:

- Emissione di luce da un corpo ad alta temperatura (corpo nero) → *teoria di Planck e prima ipotesi di quantizzazione dell'energia per un sistema oscillante*;
- Emissione di particelle (elettroni) da un metallo illuminato da luce UV (effetto fotoelettrico, Hertz 1887) → *concetto di fotone (Einstein) e relazione energia-frequenza, introduzione della funzione lavoro nei solidi*;
- Urto (scattering) tra fotoni e particelle (effetto Compton 1923) → *conferma del comportamento particellare dei fotoni*
- Emissione di luce da gas eccitati elettricamente o termicamente: spettri discreti → *modello di Bohr e introduzione del concetto di stati quantizzati per gli elettroni in un atomo (idrogenoide)*;
- Calore specifico dei solidi: comportamento a basse temperature → *quantizzazione delle oscillazioni degli atomi nei solidi*;
- Esperimento di Michelson-Morley sulla velocità della luce (1887) → *teoria della relatività (ristretta, Einstein 1905)*

# Radiazione di corpo nero (black-body radiation)

Un qualunque oggetto che si trova a temperatura superiore a 0 K (gradi Kelvin, temperatura assoluta) emette onde elettromagnetiche, e.m. (per temperature vicino alla temperatura ambiente si tratta di infrarossi,  $\lambda > 1 \mu\text{m}$ ).



*Fig. configurazione sperimentale per l'analisi spettroscopica delle onde e.m. emessa da un corpo caldo*



*Fig. immagine "termografica" di oggetti caldi (termocamera)*

L'emissione di onde elettromagnetiche da un corpo "caldo" ( $T > 0$  K) si spiega classicamente con il moto oscillante delle cariche sulla superficie del corpo per effetto dell'agitazione termica.

Equazione di Larmor (per velocità delle cariche  $v \ll c$ ): potenza emessa da una carica elettrica  $q$  soggetta ad un'accelerazione  $a$ :

$$P (W) = \frac{q^2 a^2}{6 \pi \epsilon_0 c^3}$$

L'energia totale (cioè su tutto lo spettro elettromagnetico) emessa per unità di tempo e di area (intensità totale) da un corpo a temperatura  $T$  è data dalla legge di Stefan (1879):

$$I(Wm^{-2}) = e\sigma T^4$$

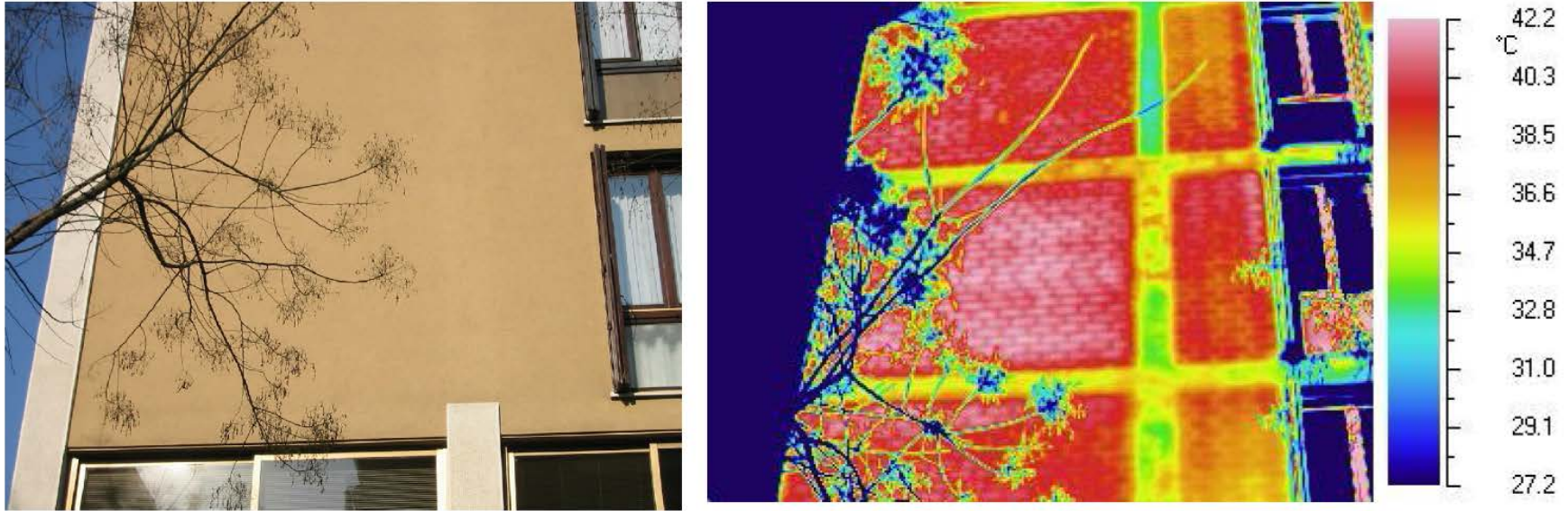
dove  $\sigma$  = costante di Stefan-Boltzmann ( $5.67 \times 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}$ ),  $e$  = emissività (0-1, dipendente dalla natura della superficie dell'oggetto).

L'andamento della curva di Stefan dalla temperatura assoluta  $T$  e il valore della costante di Stefan-Boltzmann sono il risultato di dati sperimentali.

Il valore di emissività di un materiale dipende dalle condizioni della superficie (es. ossidata o meno, rugosità), dalla temperatura e dalla lunghezza d'onda. Esempi di valori di emissività totale (cioè mediata sulle varie lunghezze d'onda) ([www.transmetra.ch](http://www.transmetra.ch)):

Alluminio non ossidato	T=25°C	e= 0.022
	T=500°C	e= 0.06
Alluminio ossidato	T=600°C	e= 0.19
Grafite		e=0.70-0.80
Oro	T=100°C	e=0.02
Ferro non ossidato	T=100°C	e=0.21
	fortemente ossidato	T=40-200°C
Vetro	T=0-200°C	e=0.95

L'emissività è utilizzata, per esempio, per determinare a distanza la temperatura di una superficie, utilizzando la termografia



Un corpo colpito da onde e.m. può assorbirne una parte, convertendo l'energia dell'onda in energia termica, aumentando cioè la sua temperatura, a causa dell'aumento dell'energia cinetica delle cariche in superficie.

Si definisce **a = assorbanza** il rapporto tra l'energia delle onde e.m. assorbita e l'energia incidente (trascurando la parte trasmessa, quindi per campioni spessi):

$$a = \frac{\text{energia assorbita}}{\text{energia incidente}}$$

Da considerazioni termodinamiche Kirchhoff (1895), verificate anche sperimentalmente, stabili che

$$a = e$$

Pertanto, per esempio, un oggetto che ha un'alta emissività ( $e \rightarrow 1$ ) avrà anche un'alta assorbanza ( $a \rightarrow 1$ ) e viceversa.

Un oggetto di particolare interesse è il **Corpo Nero (black-body)**.

**Corpo Nero: “oggetto” che assorbe tutta la radiazione incidente, indipendentemente dalla sua lunghezza d’onda:**

$$a = \frac{\text{energia assorbita}}{\text{energia incidente}} = 1$$

Pertanto per un corpo nero è nulla la parte di energia dell’onda e.m. incidente che è riflessa dalla superficie (la radiazione trasmessa in questo tipo di analisi si trascura sempre, ovvero si considerano oggetti “spessi”).

Per un corpo nero, essendo  $a=1$ , si ha anche  $e = 1$ , e pertanto la legge di Stefan diventa una legge universale (cioè indipendente dalle caratteristiche del corpo):

$$I = \sigma T^4$$

Un esempio di corpo nero è un piccolo foro praticato sulle pareti di una cavità: tutta l’energia incidente sul foro è assorbita. Infatti non ci può essere riflessione perché se il foro è piccolo è estremamente improbabile che le onde e.m. entranti dal foro dall’esterno, riflesse dalle superfici interne della cavità, riescano ad uscire dal foro stesso. Pertanto la radiazione e.m. emessa dal foro rappresenta l’emissione di un corpo nero a temperatura  $T$ ! Viceversa una parte dell’intensità delle onde e.m. emessa dalla superficie esterna del corpo potrebbero essere dovuta alla riflessione di onde e.m. riflesse della superficie stessa provenienti dall’ambiente circostante.

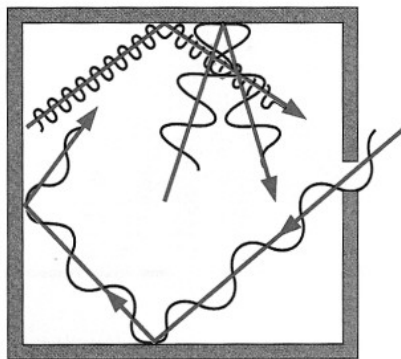


FIGURE 3.15 A cavity filled with electromagnetic radiation. The hole in the wall of the cavity represents an ideal blackbody.

L'andamento "spettrale", cioè la dipendenza di  $I_T$  dalla lunghezza d'onda delle onde e.m. emesse, è data dalla radianza  $R_T(\lambda)$ :

$$I_T = \int_0^{\infty} R_T(\lambda) d\lambda$$

Le misure fatte alla fine del XIX secolo (Lummer e Pringsheim, 1899) mostrarono un andamento della radianza simile a quello riportato in figura.

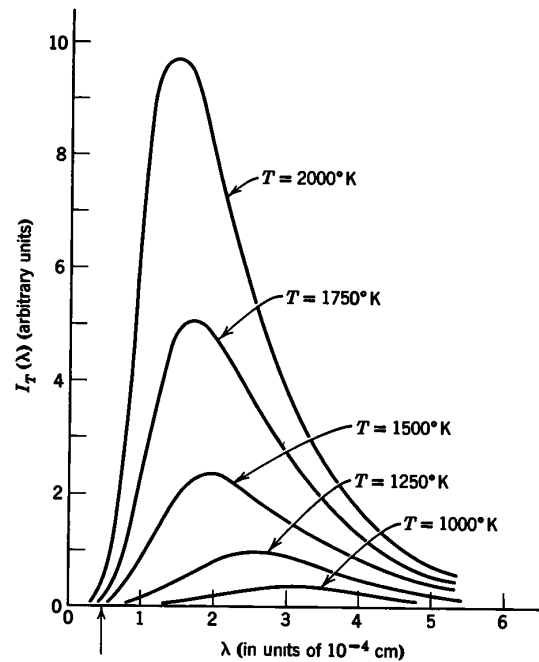
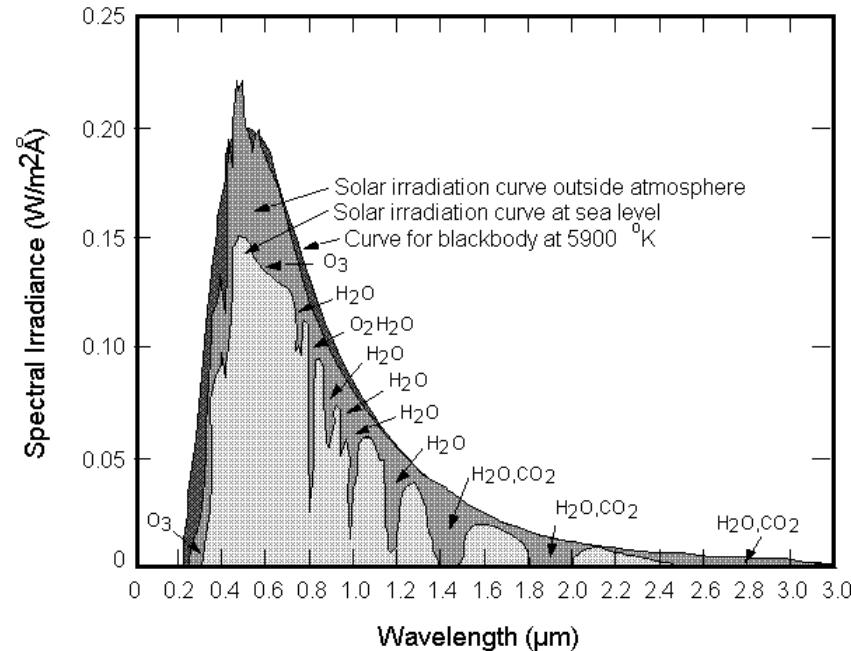


Fig. Andamento di  $R_T(\lambda)$  per un corpo nero a diverse temperature  $T$

Dall'andamento sperimentale si osserva come il valore di  $\lambda$  al quale si osserva il massimo di emissione per un corpo nero dipende dalla temperatura secondo la legge dello spostamento di Wien (1893):

$$\lambda_{max} = \frac{C}{T} \quad \text{con } C = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m K.}$$

Un esempio di corpo nero è il sole con una temperatura di 5900K.



*Fig. Spettro di emissione del sole al di fuori dell'atmosfera confrontato con l'emissione di un corpo nero con  $T=5900K$  (in chiaro lo spettro misurato al livello del mare con gli assorbimenti dovuti alle molecole presenti nell'atmosfera)*

Se la radiazione emessa da un corpo nero (il foro) è quella presente nella cavità, emessa dalle pareti della cavità a temperatura  $T$ , allora la radianza  $R_T(\lambda)$  è collegata alla densità di energia e.m. presente all'interno della cavità  $u_T(\lambda)$ , definita come l'energia del campo e.m. per unità di volume nell'intervallo di lunghezze d'onda tra  $\lambda$  e  $\lambda+d\lambda$ . Si può dimostrare che:

$$R_T(\lambda) = \frac{c}{4} u_T(\lambda)$$

dove  $c$  è la velocità della luce. Questa relazione vale per cavità di qualsiasi forma. Pertanto per determinare la radianza  $R_T(\lambda)$  "basta" calcolare la densità di energia e.m.  $u_T(\lambda)$ .



Da considerazioni termodinamiche Wien (1893) trovò una relazione funzionale per la densità di energia  $u_T(\lambda)$  di un corpo nero a temperatura T. Questa dipende da una funzione di  $\lambda T$  (non nota) secondo la seguente equazione:

$$u_T(\lambda) = \frac{f(\lambda T)}{\lambda^5}$$

Questa equazione approssima bene i dati sperimentali (fig. seguente) ma non si hanno ancora informazioni dettagliate sulla  $f(\lambda T)$ .

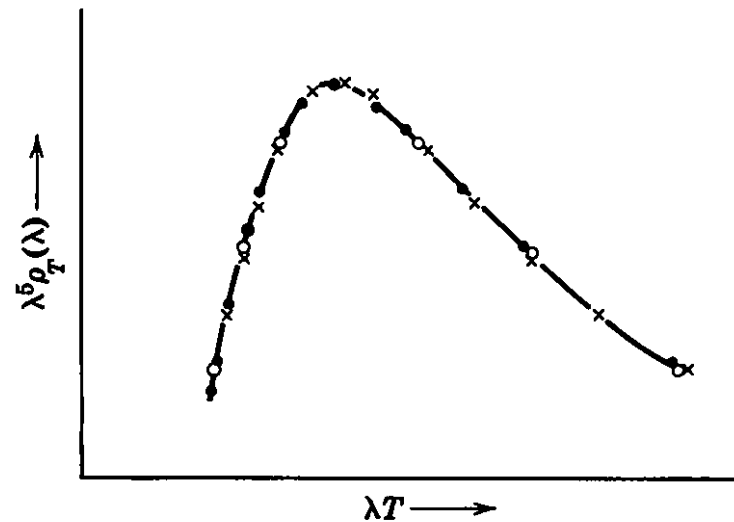


Figure 2-5. An experimental verification of Wien's law. ●,  $T = 1646^\circ\text{K}$ ; ×,  $T = 1449^\circ\text{K}$ ; ○,  $T = 1259^\circ\text{K}$ . From F. K. Richtmyer, E. H. Kennard, and T. Lauritsen, *Introduction to Modern Physics*, 5th ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1955.

*Fig. Confronto tra i dati sperimentali e la curva teorica data dalla legge di Wien*

Negli anni diversi fisici cercarono di determinare teoricamente la formula che spiegasse i dati sperimentali

Anno	Autore	Formula
1887	Władimir Aleksandrowicz Michelson	$e(\lambda, T) = aT^{3/2}\lambda^{-6} \exp(-b/\lambda^2 T)$
1888	Heinrich Weber	$e(\lambda, T) = a\lambda^{-2} \exp(cT - b/\lambda^2 T^2)$
1896	Wilhelm Wien	$e(\lambda, T) = a\lambda^{-5} \exp(-b/\lambda T)$
1896	Friedrich Paschen	$e(\lambda, T) = a\lambda^{-5.6} \exp(-b/\lambda T)$
1900	Lord Rayleigh	$e(\lambda, T) = aT\lambda^{-4} \exp(-b/\lambda T)$
1900	Otto Lummer i Ernst Pringsheim	$e(\lambda, T) = aT\lambda^{-4} \exp(-b/(\lambda T)^{1.25})$
1900	Otto Lummer i Eugen Jahnke	$e(\lambda, T) = a\lambda^{-5} \exp(-b/(\lambda T)^{0.9})$
1900	Max Thiesen	$e(\lambda, T) = aT^{0.5}\lambda^{-4.5} \exp(-b/\lambda T)$
1900	Max Planck (19 X)	$e(\lambda, T) = a\lambda^{-5} \left( \frac{1}{\exp(b/k\lambda T) - 1} \right)$
1900	Max Planck (14 XII)	$e(\lambda, T) = 8\pi hc\lambda^{-5} \left( \frac{1}{\exp(hc/k\lambda T) - 1} \right)$

Nel 1900 Lord Rayleigh e, successivamente con correzioni, nel 1905 J. Jeans ottennero una equazione, detta equazione di Rayleigh-Jeans, determinando le onde e.m. che potevano essere contenute nella cavità e calcolando l'energia media di ogni onda.

Per calcolare le onde presenti nella cavità supposero le pareti metalliche (tra l'altro gli esperimenti si eseguivano su corpi neri metallici) e, imponendo la condizione che le onde e.m. fossero stazionarie (il campo elettrico deve annullarsi sulla superficie interna della cavità), ottennero che il numero di onde e.m. con lunghezza d'onda tra  $\lambda$  e  $\lambda+d\lambda$  per unità di volume è dato da:

$$N(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda$$

Questo risultato è indipendente dalla forma della cavità.

Per la fisica classica l'energia di un'onda è proporzionale al quadrato della sua ampiezza, quindi, nel caso delle onde e.m. l'energia è proporzionale al quadrato del campo elettrico,  $E^2$ . In linea di principio, quindi, le onde e.m. potrebbero avere energie che vanno da  $0 \rightarrow \infty$ .

Quando però si ha a che fare un un gran numero di entità fisiche dello stesso tipo in equilibrio termico tra loro la fisica statistica classica stabilisce che l'energia totale sia distribuita tra le varie entità secondo una ben definita distribuzione di probabilità. In questo modo determinarono che l'energia media delle onde e.m. nella cavità le cui pareti si trovano a temperatura T è data da

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} EP(E)dE}{\int_0^{\infty} P(E)dE} = \frac{\int_0^{\infty} E e^{-\frac{E}{kT}} dE}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{E}{kT}} dE} = kT$$

essendo

$$P(E) = A e^{-\frac{E}{kT}}$$

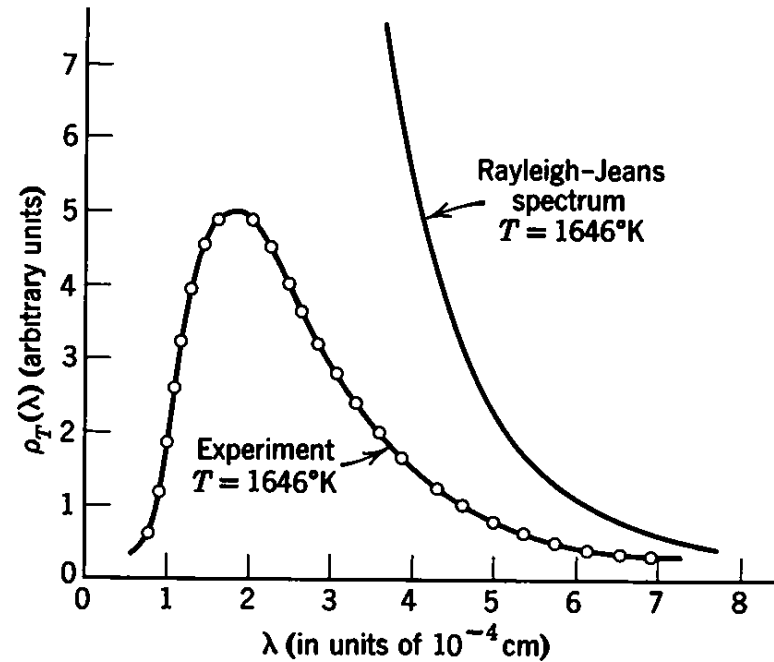
la distribuzione di probabilità di Boltzmann, che indica la probabilità che uno stato di energia E sia occupato alla temperatura T. L'integrale tiene conto della distribuzione continua dei possibili stati energetici.

In questo modo la densità di energia contenuta nella cavità del corpo nero, le cui pareti si trovano a temperatura T, nell'intervallo di lunghezze d'onda  $\lambda$  e  $\lambda+d\lambda$ , è data da:

$$u_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} d\lambda = \frac{8\pi k}{\lambda^5} \lambda T d\lambda$$

dove k è la costante di Boltzmann. Come si vede questa equazione ha la forma funzionale prevista da Wien:  $f(\lambda T) = 8\pi k \lambda T$

Ma confrontando i dati sperimentali con la curva della legge di Rayleigh-Jeans si osserva una buona corrispondenza solo per grandi valori di  $\lambda$  (infrarosso) mentre per piccoli valori di  $\lambda$  (ultravioletti) la curva teorica diverge (*catastrofe ultravioletta*). Infatti, integrando la funzione  $u_T(\lambda)$  tra 0 e infinito per ottenere l'energia totale emessa per unità di tempo e di area si ottiene un valore infinito!



re 2-11. A comparison of the Rayleigh-Jeans spectrum and experiment.

*Fig. Confronto tra dati sperimentali dell'emmissione da corpo nero e la curva di Rayleigh-Jeans.*

## Teoria di Planck

Nel 1901 Planck (Nobel 1918), conservando il calcolo delle onde e.m. stazionarie presenti nella cavità, cambiò completamente il calcolo dell'energia media di ogni onda, introducendo un concetto rivoluzionario: la quantizzazione dell'energia. Infatti suppose che:

“ogni entità fisica che compie oscillazioni armoniche può emettere o assorbire energia in multipli interi della frequenza di oscillazione  $\nu$ :

$$\Delta E = n h \nu$$

con  $n = 0, 1, 2, \dots$  ed  $h$  = costante universale (detta poi costante di Planck).

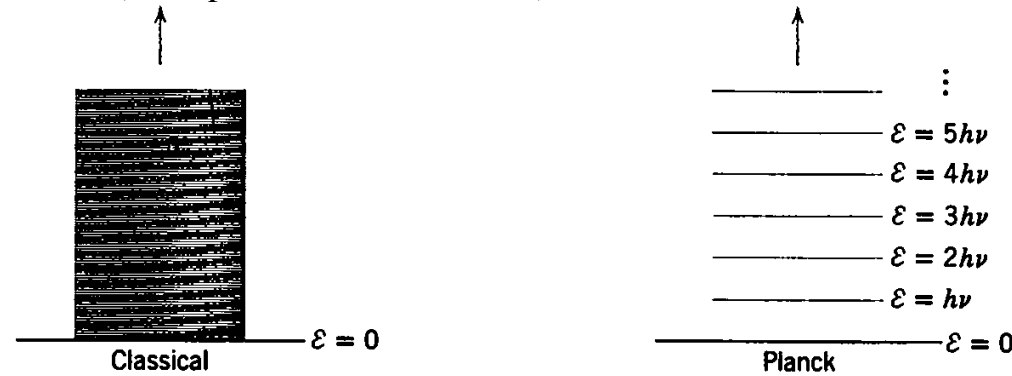


Fig. Diagrammi di energia per un oscillatore armonico secondo la visione classica (sinistra) e di Planck (destra)

Utilizzando la distribuzione di probabilità di Boltzmann e considerando che l'energia media  $\bar{E}$ , nel caso di una distribuzione discreta di stati, è data da:

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E P(E)}{\sum_{n=0}^{\infty} P(E)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n h \nu A e^{-\frac{n h \nu}{k T}}}{\sum_{n=0}^{\infty} A e^{-\frac{n h \nu}{k T}}} = \frac{h \nu}{e^{\frac{h \nu}{k T}} - 1} = \frac{h c / \lambda}{e^{\frac{h c}{\lambda k T}} - 1}$$

si ottiene l'equazione di Planck sulla densità di energia che si trova all'interno della cavità del corpo nero:

$$u_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} d\lambda$$

Con questa equazione si riesce a riprodurre perfettamente i risultati sperimentali (vedi Fig.) imponendo alla costante h il valore:

$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

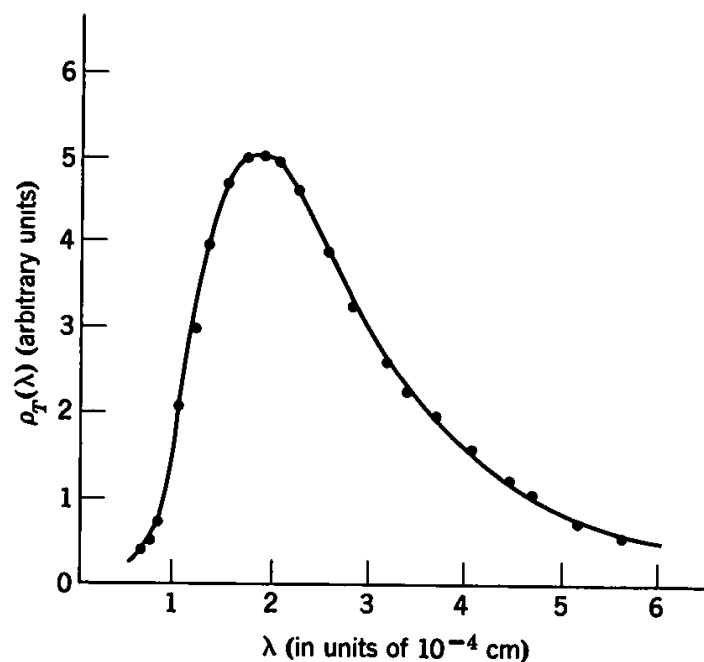


Figure 2-13. A comparison of Planck's spectrum and experiment. The dots are experimental and the curve is theoretical.  $T = 1646^\circ\text{K}$ .

*Fig. Confronto tra la densità di energia calcolata dall'equazione di Planck (linea continua) e i dati sperimentali (punti).*

**Il risultato ottenuto da Planck è considerato il primo passo verso l'introduzione della meccanica quantistica.**

Domanda: ma un oscillatore classico (pendolo) obbedisce alla stessa legge, cioè perde energia in “quanti” pari a  $h\nu$  (o suoi multipli) ?

Pendolo:  $l=1\text{m}$ ,  $m=10^{-2}\text{kg}$ ,  $\theta = 5^\circ$

$$E_{tot} = E_p(\text{max ampiezza}) = mgl(1 - \cos\theta) = 3.7 \times 10^{-4} \text{ J}$$

Usando la teoria di Planck:  $T=2\text{s}$ ,  $\nu=0.5\text{s}^{-1}$  (Hz)

$$E = h\nu = 3.8 \times 10^{-34} \text{ J.}$$

Poiché, seguendo la teoria di Plack, anche le variazioni di energia sono quantizzate:

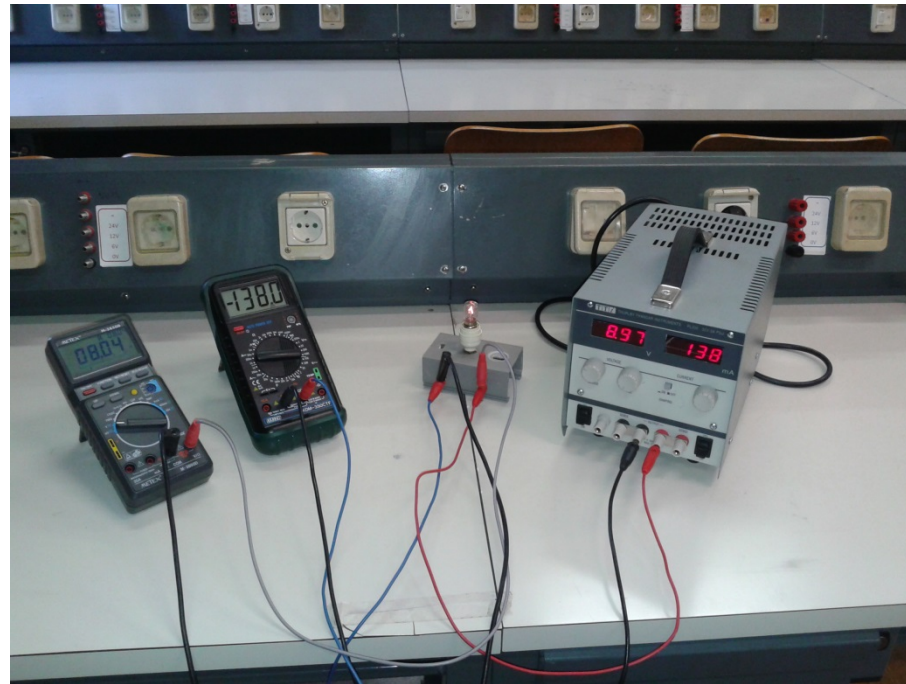
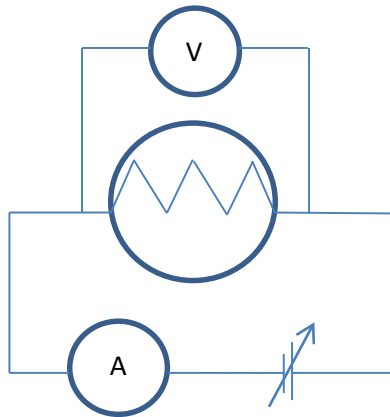
$$E_f - E_i = \Delta E = \Delta n h\nu = (n_f - n_i)h\nu = (n_f - n_i) \times 3.8 \times 10^{-34} \text{ J}$$

quindi le variazioni di energia sono 30 ordini di grandezza inferiori all'energia totale, impossibile osservare sperimentalmente la quantizzazione della variazione di energia!

## Verifica sperimentale della legge di Stefan

$$I = e\sigma T^4$$

Si misura la potenza dissipata da un filamento di una lampadina percorso da corrente elettrica, misurando la corrente ( $i$ ) che passa nel filamento e la differenza di potenziale ( $V$ ) ai capi del filamento stesso.



La potenza totale dissipata dal filamento (la nostra resistenza)  $P = Vi$  essendo  $V$ = differenza di potenziale ai capi del filamento e  $i$ =intensità della corrente elettrica che attraversa il filamento

Inoltre la resistenza elettrica è data da  $R = V/i$  e  $R(T) = R(T_0)[1 + \alpha(T - T_0)]$ ,



con l'ipotesi che lunghezza e sezione del filamento non variano con la temperatura  $T$ , dove  $R(T)$  = resistenza a  $T$  e  $R(T_0)$  = resistenza a  $T_0$  e  $\alpha$ =coefficiente di temperatura (nel caso del tungsteno  $\alpha= 4.5 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ).

Misurando la  $R(T_0)$  per un valore di  $i$  molto piccolo si può supporre che  $T_0$ = temperatura ambiente.

Misurando  $V$  ed  $i$  per valori diversi fino all'incandescenza della lampadina, si può determinare la temperatura della lampadina  $T$  dal valore di  $R(T)=V(T)/i(T)$  e il valore di  $P(T)=V(T)i(T)$

Per ogni valore di  $T$  si può pertanto determinare  $P(T)$ .

Trascurando la dissipazione termica verso i contatti si può supporre che la potenza sviluppata sia dissipata per irraggiamento.

Quindi se  $P(T)=AT^B$ , passando ai logaritmi:  $\ln P(T)= \ln A+B \ln T$ .

Graficando su scala log-log e facendo un fit lineare si può determinare l'esponente  $B$ .

Con una comune lampadina a filamento, da max 32 V(come nella foto), si ottiene il grafico di seguito riportato e un  $B \sim 3.2$ -3.3.

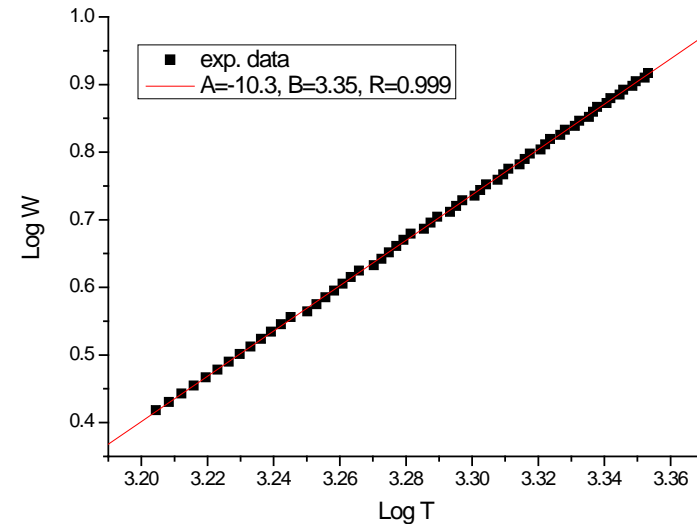
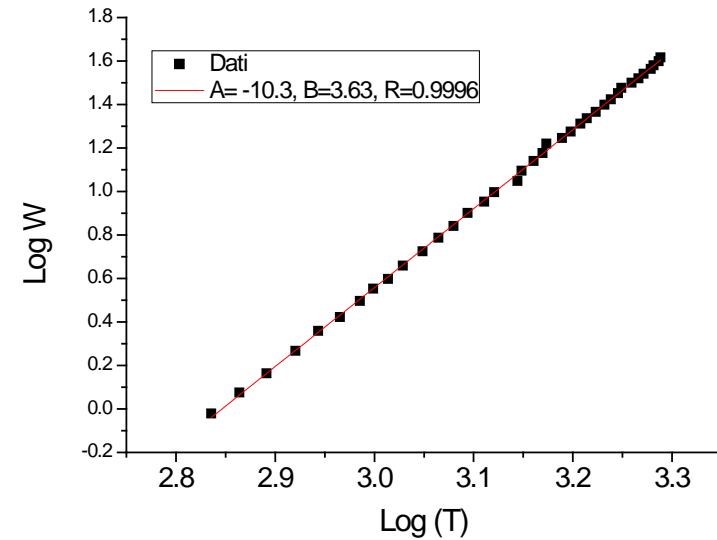


Fig. Esempio di risultati sperimentali con fit lineare

Un miglior risultato si ottiene utilizzando lampadine con filamento molto lungo, come quella nella foto sottostante (sempre commerciali ma di più difficile reperimento). Queste lampadine vanno però alimentate fino a 230-240 V (in alternata)!



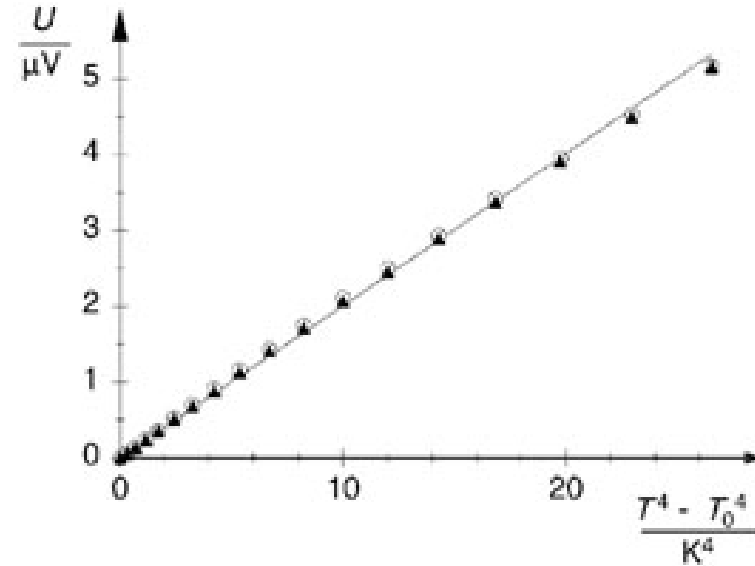
In questo caso si ottiene un coefficiente angolare ( $B=3.6$ ) più vicino a quello atteso ( $B=4$ ), questo a causa della migliore uniformità della temperatura del filamento (minori dispersioni termiche).

Link:

<http://physics.gmu.edu/~ellswort/p263/steboltz.pdf>

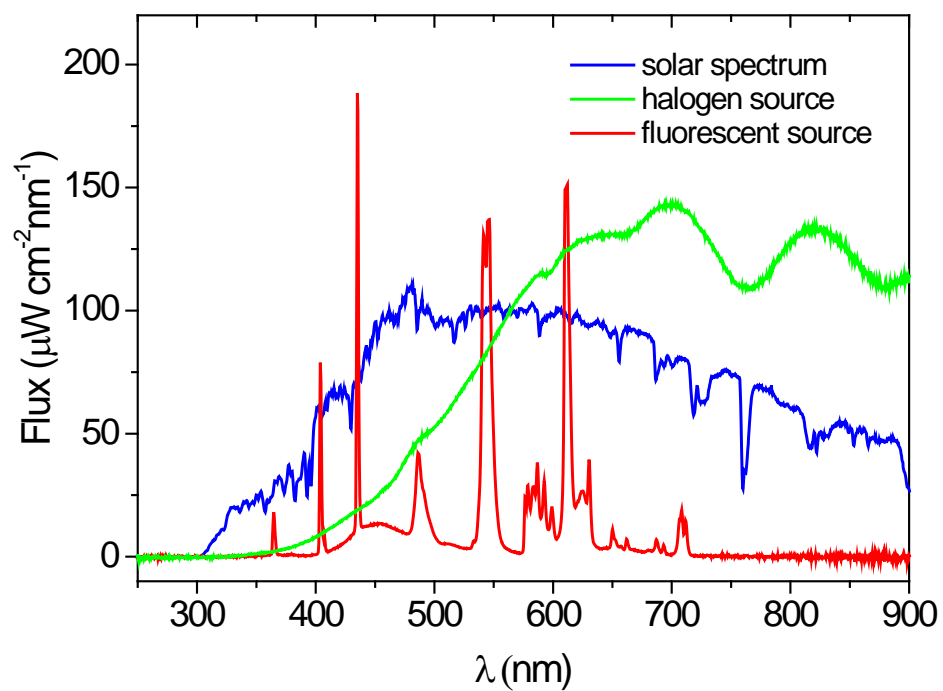
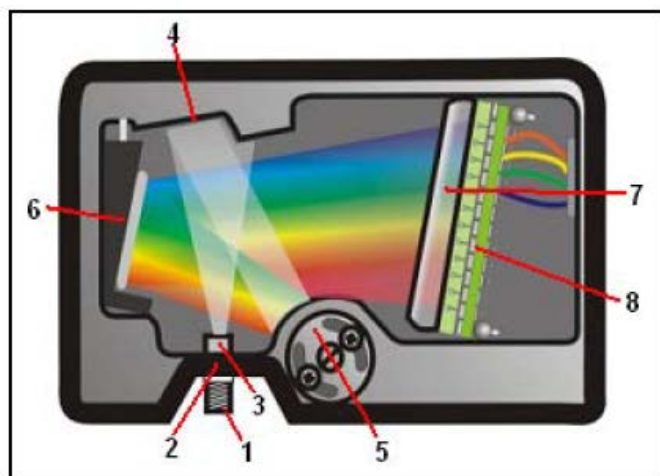
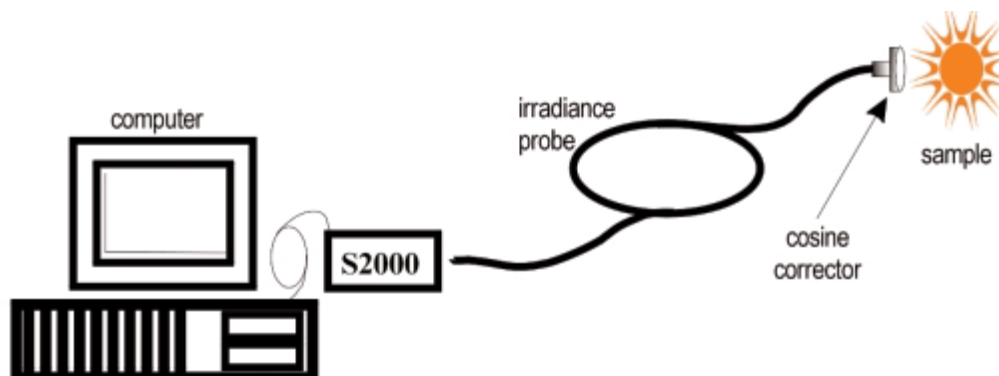
[http://studenti.fisica.unifi.it/~carla/varie/Stefan-Boltzmann\\_law\\_in\\_a\\_light\\_bulb.pdf](http://studenti.fisica.unifi.it/~carla/varie/Stefan-Boltzmann_law_in_a_light_bulb.pdf)

Apparato sperimentale completo per la determinazione della costante di Stefan-Boltzmann e la verifica della relazione  $I = \epsilon\sigma T^4$  (costo € 6500!), ma non permette di osservare lo spettro di emissione.



<http://www.leybold-shop.com/physics/physics-experiments/optics/light-intensity/laws-of-radiation.html>

Per misurare lo spettro di emissione di un corpo caldo (ottenere la  $R_T(\lambda)$  a pag. 10) bisogna usare uno spettrofotometro che, con un reticolo, seleziona le diverse lunghezze d'onda. Costi elevati per strumenti nel IR (> 10k€)



<http://oceanoptics.com/product-category/modular-spectrometers/>

## Esercizi sul corpo nero e la teoria di Planck

- 1) Una stella, approssimata con un corpo nero, ha il massimo di emissione per  $\lambda_{max} = 600 \text{ nm}$ .  
Se la potenza totale emessa è  $P = 5 \times 10^{30} \text{ W}$  determinare la temperatura della superficie della stella e il raggio della stella.

$$\text{Dalla legge di Wien: } \lambda_{max} = \frac{C}{T} \text{ con } C = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m K} \rightarrow T = \frac{C}{\lambda_{max}} = \frac{2.898 \times 10^{-3}}{600 \times 10^{-9}} = 0.483 \times 10^4 = 4830 \text{ K (4557 } ^\circ\text{C)}$$

$$\text{Se la stella è un corpo nero dalla legge di Stefan: } I = \sigma T^4 = 5.67 \times 10^{-8} \times 4830^4 = 3.09 \times 10^7 \text{ W m}^{-2}$$

Indicando con  $A$  = area della superficie della stella:

$$P = I \times A \rightarrow A = \frac{P}{I} = \frac{5 \times 10^{30}}{3.09 \times 10^7} = 1.6 \times 10^{23} \text{ m}^2 \rightarrow A = 4\pi R^2 \rightarrow R = \sqrt{\frac{A}{4\pi}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1.6 \times 10^{23}}{\pi}} = 1.1 \times 10^{11} \text{ m}$$

- 2) Il corpo umano si trova a circa  $T = 36^\circ\text{C}$ . Supponendo che si possa approssimare ad un corpo nero, determinare la lunghezza d'onda alla quale si ha il massimo di emissione e la potenza emessa per  $\lambda_{max}$ , in un intervallo di lunghezze d'onda di 1 nm intorno ad esso, da 4 cm<sup>2</sup> di superficie.

$$T = 36^\circ\text{C} = 309 \text{ K} \rightarrow \text{dalla legge di Wien: } \lambda_{max} = \frac{b}{T} = \frac{2.898 \times 10^{-3}}{309} = 9.4 \times 10^{-6} \text{ m} = 9.4 \mu\text{m IR !!}$$

$$P = I \times A \text{ con } A = 4 \text{ cm}^2$$

$$I_T = \int_0^\infty R_T(\lambda) d\lambda \rightarrow \text{per un intervallo molto piccolo ma finito } \Delta\lambda \text{ (1 nm)} \Delta I = R(\lambda)\Delta\lambda, \text{ con } R(\lambda) = R(\lambda_{max})$$

$$R(\lambda_{max}) = \frac{c}{4} \frac{8\pi hc}{\lambda_{max}^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda_{max}kT}} - 1} \text{ con } \lambda_{max} = \frac{b}{T} \rightarrow T = \frac{b}{\lambda_{max}}$$

$$\begin{aligned}
R(\lambda_{max}) &= \frac{c}{4} \frac{8\pi hc}{\left(\frac{b}{T}\right)^5} \frac{1}{e^{\left(\frac{hc}{\frac{b}{T}kT}\right)} - 1} = \frac{c}{4} \frac{8\pi hc}{b^5} T^5 \frac{1}{e^{\left(\frac{hc}{bk}\right)} - 1} = \frac{2\pi hc^2}{b^5} \frac{1}{e^{\left(\frac{hc}{bk}\right)} - 1} T^5 \\
&= \frac{2 \times 3.14 \times 6.63 \times 10^{-34} \times (3 \times 10^8)^2}{(2.898 \times 10^{-3})^5} \left[ \frac{1}{e^{\left(\frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{2.898 \times 10^{-3} \times 1.38 \times 10^{-23}}\right)} - 1} \right] T^5 = 1.287 \times 10^{-5} \times T^5 = \\
&= 1.287 \times 10^{-5} \times 309^5 = 3.63 \times 10^7 W m^{-2} m^{-1} = 3.63 \times 10^7 W m^{-3}
\end{aligned}$$

$$\Delta I(\lambda_{max}) = R(\lambda_{max}) \Delta \lambda = 3.63 \times 10^7 \times 10^{-9} = 3.63 \times 10^{-2} W m^{-2}$$

$$\Delta P(\lambda_{max}) = A \times \Delta I(\lambda_{max}) = 4 \times 10^4 \times 3.63 \times 10^{-2} = 1.45 \times 10^{-5} W$$

Su qualche libro si parla della seconda legge di Wien:

$$R(\lambda_{max}) = \frac{2\pi hc^2}{b^5} \frac{1}{e^{\left(\frac{hc}{bk}\right)} - 1} T^5 = a \times T^5 = 1.287 \times 10^{-5} \times T^5 W m^{-3}$$

# Effetto fotoelettrico

## Scoperta degli elettroni

1895 J.B. Perrin scopre che i raggi catodici sono elettroni (Premio Nobel 1926 per la verifica sperimentale della natura particellare della materia)

Nella seconda metà del XIX secolo vennero eseguiti diversi esperimenti sul passaggio di una corrente elettrica (raggi catodici) all'interno di gas rarefatti (P. Lenard 1890, Nobel 1905).

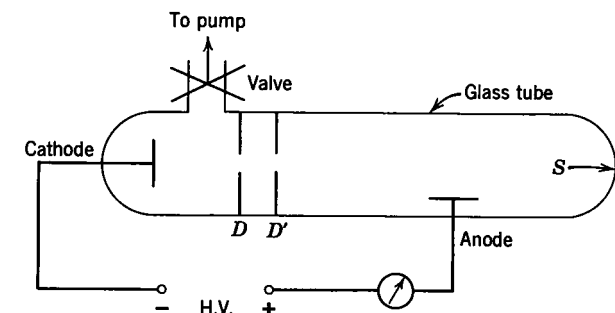
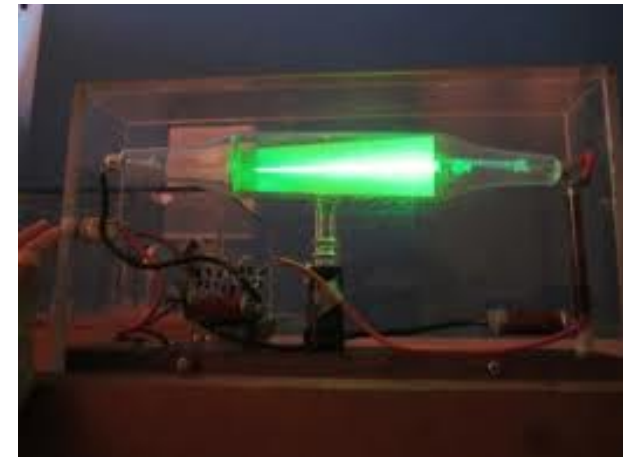
*Fig. Luce emessa da un gas a bassa pressione quando è applicata un'alta differenza di potenziale tra 2 elettrodi (catodo e anodo) (tubo di Geissler ~ 1860).*

In un'ampolla, nella quale è presente del gas a bassa pressione (alcuni Torr, 1 atmosfera = 760 Torr!), è applicata un'alta differenza di potenziale tra due elettrodi, un catodo (negativo) ed un anodo (positivo).

Se la pressione del gas all'interno dell'ampolla è sufficientemente elevata si osserva il passaggio di corrente tra catodo ed anodo e l'emissione di luce (come mostrato sopra) la cui luminosità, colore, presenza di bande scure ecc. dipende da molti fattori.

Se la pressione del gas è inferiore a circa  $10^{-2}$  Torr non si osserva nessuna emissione di luce ma continua il passaggio di corrente tra catodo ed anodo e si osserva uno spot luminoso S sullo schermo.

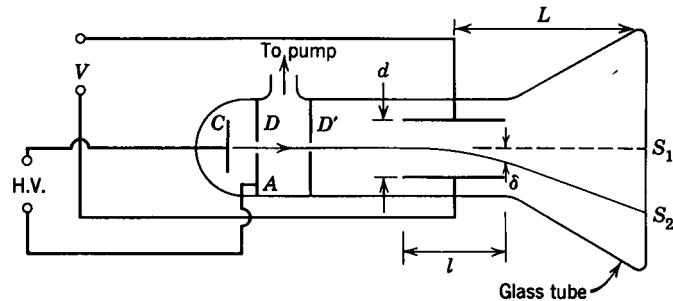
Con diverse misure venne determinato che i raggi catodici (perché emessi dal catodo) portano carica negativa.



## Determinazione del rapporto q/m degli elettroni

1897: J.J. Thomson determina il rapporto q/m degli elettroni (Premio Nobel 1906 per lo studio degli elettroni)

(Thomson usò un metodo diverso basato sui campi elettrici come da figura di seguito)



$$S_1 S_2 = \frac{q}{m} \frac{VL}{dl} \left(\frac{l}{v}\right)^2$$

Inviando elettroni, con velocità  $\vec{v}$ , all'interno di un campo magnetico  $\vec{B}$  questi sono soggetti alla Forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

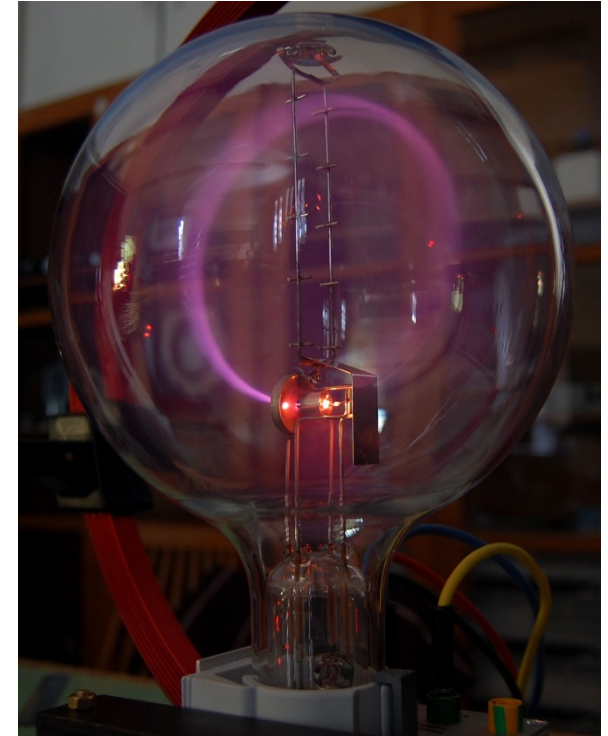
Se  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  sono perpendicolari:  $F = qvB$  e gli elettroni compiono orbite circolari di raggio R.

Uguagliando la forza di Lorentz alla forza centripeta:  $m \frac{v^2}{R} = qvB$

e conoscendo la velocità degli elettroni dalla differenza di potenziale V applicata per accelerarli:

$\frac{1}{2} mv^2 = qV$  (con questo metodo si può determinare la velocità degli elettroni anche per il metodo usato da Thomson indicato di sopra)

$$\frac{q}{m} = \frac{2V}{R^2 B^2} \quad (\text{http://dsfc.univaq.it/lozzi/teaching/Appunti%20Fisica%20della%20Materia/Rapporto_e-m_ELWE.pdf})$$





## Determinazione della carica q degli elettroni

1900 J.S. Townsend e J.J. Thomson e 1909 R.A. Millikan (Premio Nobel 1923): determinazione della carica q di un elettrone

Alcune gocce di olio cariche elettricamente (con carica elettrica q) sono immesse in una camera con aria tra due piatti, distanti d, tra i quali è applicata una differenza di potenziale V.

All'equilibrio la forza elettrica eguaglia la forza gravitazionale:

$$q \frac{V}{d} = mg$$

Se il campo elettrico è rimosso le gocce cadono e sono soggette alla forza gravitazionale e alla forza di attrito (legge di Stokes) con l'aria:

$$mg - 6\pi\eta rv = ma$$

essendo v la velocità di caduta, r il raggio delle gocce e  $\eta$  la viscosità dell'aria.

La massa m è collegata alla densità  $\rho$  dell'olio:

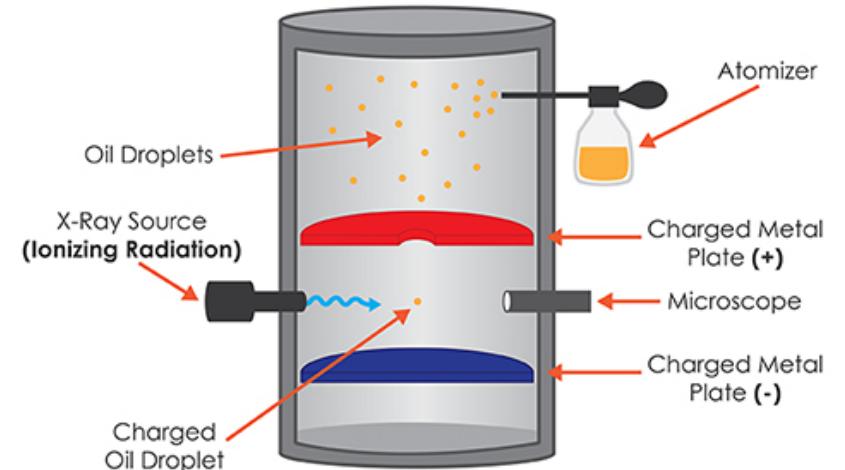
$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

Se le gocce raggiungono la velocità limite,  $v_L$ , (come il paracadutista !) si ha la condizione di equilibrio ( $a = 0$ ):

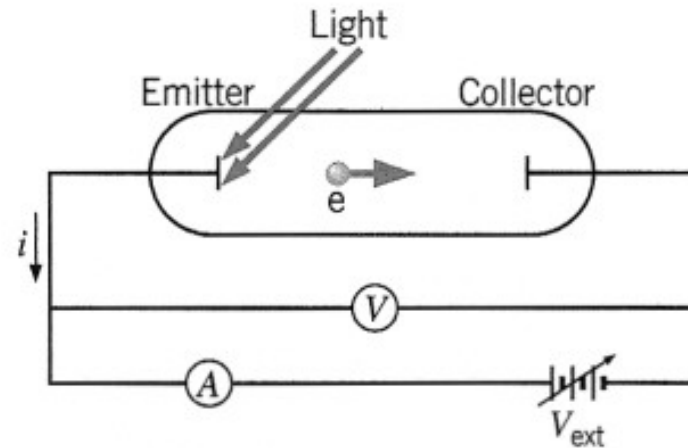
$$mg - 6\pi\eta rv_L = 0 \rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 6\pi\eta rv_L \rightarrow r = \sqrt{\frac{9\eta v_L}{2\rho g}}$$

La velocità  $v_L$  si determina osservando il moto con il microscopio quindi si determina r e, pertanto, m. Da ciò si ottiene q dalla prima equazione. Misurando molte gocce si osservò che la carica q era sempre un multiplo di un valore,  $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ , definita **carica elementare**.

Determinata q e conoscendo il rapporto q/m Thomson determinò la massa m degli elettroni:  $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$



Nel 1887 Hertz mostrò che illuminando con luce UV un emettitore (catodo) di metallo e polarizzando un altro elettrodo collettore (anodo) positivamente rispetto al catodo si misurava una corrente elettrica tra catodo e anodo. I due elettrodi erano contenuti in un'ampolla di quarzo all'interno della quale era rimossa l'aria.



*Fig. Schema dell'apparato sperimentale per l'effetto fotoelettrico*

L'intensità di questa corrente dipende:

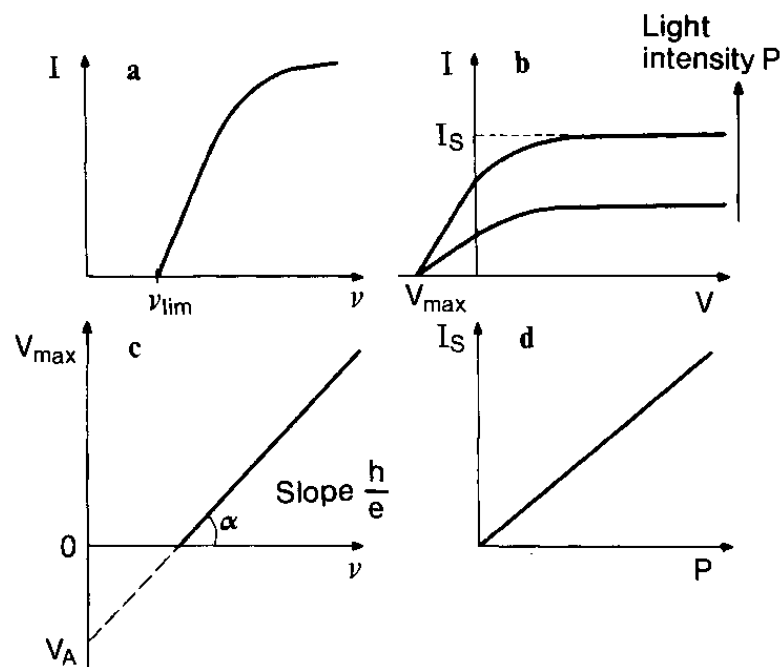
- dall'intensità della luce utilizzata (maggiore è l'intensità, maggiore la corrente)
- dalla tensione di polarizzazione (polarizzando l'anodo negativamente rispetto al catodo la corrente diminuisce fino ad annullarsi, tensione massima,  $V_s$ ) (Fig. successiva)

Inoltre:

- il valore della tensione di soglia è indipendente dall'intensità della luce UV utilizzata;
- l'emissione di luce è praticamente immediata (esperimenti nel 1928  $t < 10^{-9}$  s);
- cambiano la frequenza della luce UV cambia la tensione massima  $V_s$  (Fig. successiva)

Invece, utilizzando la luce visibile, indipendentemente dalla intensità della sorgente e dalla polarizzazione applicata, non si osserva passaggio di corrente.

Esiste pertanto una frequenza di soglia,  $\nu_{lim}$ , sotto la quale non si osserva passaggio di corrente e, oltre la quale la corrente dipende dall'intensità della luce incidente e dalla differenza di potenziale applicata.



*Fig. a) andamento della corrente ( $I$ ) in funzione della frequenza della luce incidente ( $\nu$ ); b) dipendenza della corrente dall'intensità della luce incidente (per  $\nu > \nu_{lim}$ ); c) dipendenza della differenza di potenziale massima ( $V_{max}$ ) dalla frequenza della luce incidente; d) dipendenza della corrente di saturazione ( $I_s$ ) dalla intensità della luce incidente*

## Interpretazione classica:

- Le onde e.m. vengono assorbite e cedono la loro energia agli elettroni contenuti nel metallo (la loro presenza è nota da Thomson);
- Gli elettroni acquistano energia cinetica media:

$$\overline{E_k} \sim A^2 \sim E^2 \sim (\sqrt{I})^2$$

Essendo:

$$\overline{E_k} = \int_0^T \frac{1}{2} m v^2 dt = \int_0^T \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \frac{T}{2}$$

con  $x = A \sin(\omega t)$  (moto armonico degli elettroni che assorbono l'energia dall'onda e.m.), e:

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c (E_{0y}^2 + E_{0z}^2) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 = \varepsilon_0 c \langle E^2 \rangle$$

- Quando si ha emissione di elettroni, la corrente misurata è proporzionale alla intensità della sorgente di onde e.m.
- il potenziale massimo di frenamento  $V_{\max}$  dà un limite all'energia cinetica massima degli elettroni emessi dal catodo:

$$qV_{\max} = \frac{1}{2} m v^2$$

## Problemi nell'interpretazione classica:

- non è in grado di spiegare l'esistenza della frequenza limite  $\nu_{\text{lim}}$ : se  $\overline{E_k} \sim (\sqrt{I})^2$  aumentando I dovrebbe aumentare  $\overline{E_k}$  e quindi gli elettroni dovrebbero essere emessi per qualunque frequenza, supposto che I sia sufficientemente grande;
- non è in grado di spiegare perché  $V_{\text{max}}$  è indipendente dall'intensità della sorgente di onde e.m.
- non è in grado di spiegare l'emissione "istantanea" degli elettroni (inferiore a  $10^{-9}$  secondi misurati da Lawrence (1928)). Infatti, classicamente dal peso atomico (A), numero di Avogadro ( $N_A$ ) e densità ( $\rho$ )

$$\text{massa atomo} = \frac{A}{N_A}, \quad \text{vol. atomo} = \frac{\text{massa atomo}}{\rho} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

La sezione d'urto (l'area del "bersaglio" che intercetta la radiazione incidente) è  $\sim r^2$ .

L'energia emessa da una sorgente isotropa (a  $L=1\text{m}$ ) che colpisce l'atomo (al secondo):

$$P_C (W) = \frac{\text{densità di energia emessa}}{\text{secondo}} \times \text{sezione d'urto}$$

$$\text{con : } \frac{\text{densità di energia emessa}}{\text{secondo}} = \frac{\text{potenza emessa}}{4\pi L^2}$$

Supponendo:  $A=100$ ,  $N_A=6 \times 10^{23}$ ,  $\rho=10^4 \text{ kg/m}^3$ ,  $L=1\text{m}$ , potenza emessa=1W,  $V_{\text{max}}=1\text{V}$  ( $qV_{\text{max}}=1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ ), si ha:

$$P_C (W) \sim 10^{-21} \text{ Js}^{-1}$$

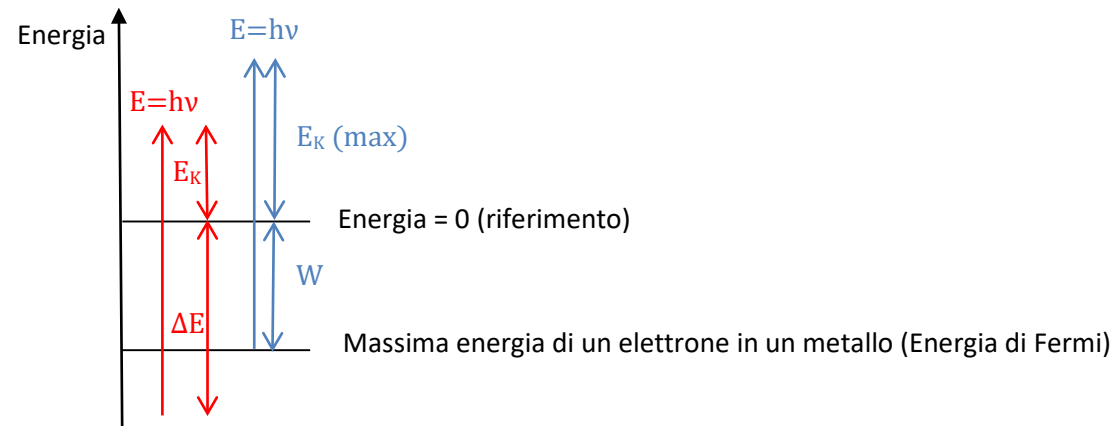
e, quindi, il tempo necessario per l'emissione degli elettroni

$$t = \frac{\text{Energia necessaria}}{\text{potenza incidente}} = \frac{qV_{\text{max}}}{P_C} = 10^2 \text{ s}$$

## Spiegazione di Einstein (1905, Nobel 1921):

- la luce è emessa sotto forma di “particelle”, detto fotoni (emessi da un sistema oscillante che segue l’idea di Planck) che si propagano alla velocità della luce,  $c$ , e quindi non si “allargano” come un’onda, di massa  $m=0$  (dalla relatività);
- l’energia è data da  $E(\text{fotone}) = h\nu$ , con  $h$  = costante di Planck;
- nel processo fotoelettrico il fotone è completamente assorbito dall’elettrone;
- l’elettrone, per essere emesso, deve acquistare una energia minima pari a  $W = h\nu_{lim}$  = funzione lavoro o di estrazione (work function), mentre non si ha alcuna emissione per  $\nu < \nu_{lim}$  (processo a soglia);
- $E_K = h\nu - \Delta E$ , dove  $\Delta E$  è l’energia persa dall’elettrone per uscire dal metallo. Questa perdita è dovuta sia a possibili urti con le altre cariche presenti nel metallo, sia al superamento della funzione lavoro.
- Il valore massimo dell’energia cinetica acquistata dall’elettrone emesso sarà:  $E_K(\text{max}) = qV_{max} = h\nu - W$ , dove  $V_{max}$  è il potenziale massimo di arresto (applicato il quale la corrente di emissione è zero).

Schema energetico del processo di fotoemissione:



Queste ipotesi spiegano tutti i risultati sperimentali e introducono il primo esempio di dualismo onda-particella: luce (onda) → fotone (particella)

## Verifica sperimentale dell'effetto fotoelettrico



Fig. a)

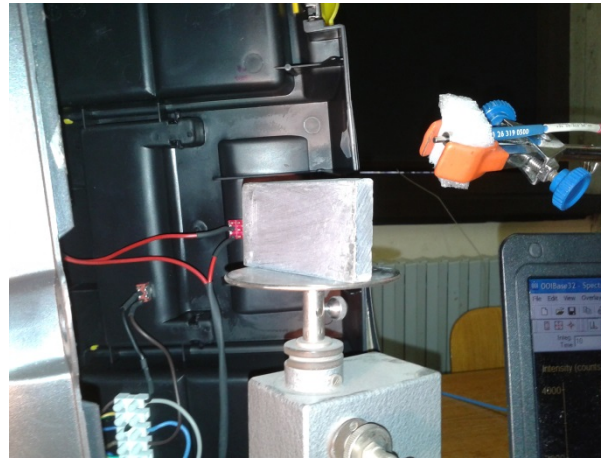


Fig. b)



Fig. c)

Lampada UV  
(germicida)

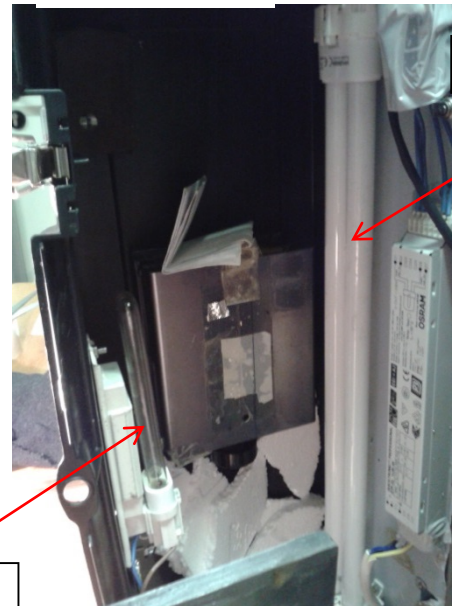
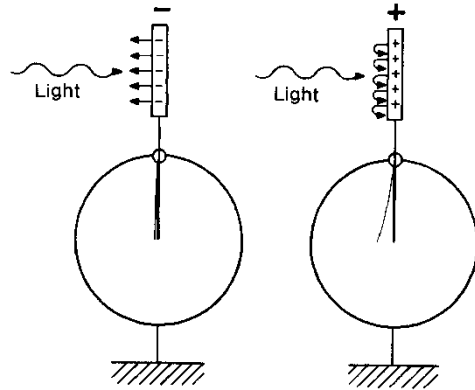


Fig. d)

*Figs. Apparato sperimentale per la dimostrazione dell'effetto fotoelettrico:*

- *Elettroscopio (Fig. a)*
- *Lamina di piombo (o zinco) (Fig. b)*
- *Bacchette plexiglass e PVC (o bachelite) e panno di lana (Fig. c)*
- *Lampade UV (germicida, es Osram OSRAM PURITEC® HNS HNS S 9W G23) e visibile (es. Philips Master PL-L-4P 36W/840) (Fig. d)*
- *Webcam + PC + videoproiettore*

<https://www.youtube.com/watch?v=4bscKD7V0Vg>



*Fig. Se l'elettrometro è carico negativamente la luce UV lo scarica, se è carico positivamente la luce UV non ha effetto.*

Video:

- [plexiglass](#) (file video compresso)
- [PVC](#) (file video compresso)

Applicazioni dell'effetto fotoelettrico:

- Spettroscopia di fotoemissione X e UV (XPS, UPS)  
[http://oldphysicscom.unimore.it/materiale\\_didattico/fotoelettrico/La%20spettroscopia%20di%20fotoemissione.pdf](http://oldphysicscom.unimore.it/materiale_didattico/fotoelettrico/La%20spettroscopia%20di%20fotoemissione.pdf)
- Rivelatori di luce: fotomoltiplicatori, fotodiodi, celle fotoelettriche (fotocellula)  
<http://www.ba.infn.it/~garuccio/didattica/fotoelettrico/applicazioni/applicazioni.htm>



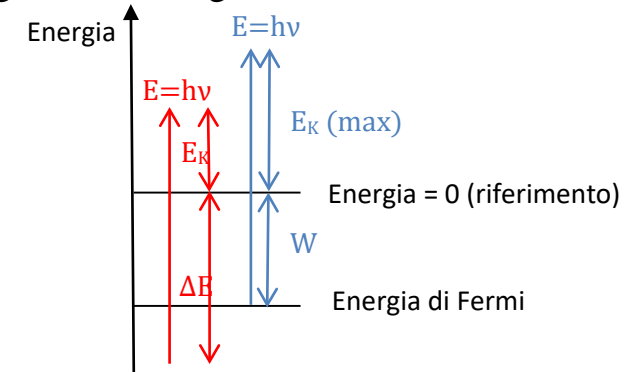
## Esercizi sull'effetto fotoelettrico

- 1) Trovare la funzione lavoro del potassio se la massima lunghezza d'onda per l'emissione di elettroni è 5620 Å. Inoltre, se si illumina il potassio con lunghezza d'onda di 2500 Å determinare la massima energia cinetica degli elettroni emessi.

$$E_K = h\nu - \Delta E$$

$$\text{Per } \lambda = \lambda_{max} \rightarrow \nu = \nu_{min} \rightarrow E_K = 0 \rightarrow h\nu - \Delta E = 0 \rightarrow h\nu = \Delta E = W$$

$$W = h\nu_{min} = \frac{hc}{\lambda_{max}} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{5620 \times 10^{-10}} = 3.54 \times 10^{-19} \text{ J}$$



In Fisica atomica/quantistica si usa per misurare le energie l'unità di misura eV (elettronvolt), che corrisponde all'energia cinetica acquistata da un elettrone quando è accelerato da una differenza di potenziale di 1 volt:

$$E = qV = 1.6 \times 10^{-19} \times 1 = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} \rightarrow 1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} \rightarrow 1 \text{ J} = 6.25 \times 10^{18} \text{ eV}$$

$$\text{Quindi nel nostro caso: } W = 3.54 \times 10^{-19} \text{ J} = \frac{3.54 \times 10^{-19}}{1.6 \times 10^{-19}} = 2.21 \text{ eV}$$

Inoltre esiste una relazione utile per trasformare le energie in lunghezze d'onda e viceversa usando eV e Å (o nm):

$$E \text{ (eV)} = \frac{hc}{\lambda(\text{Å})} = \frac{12400}{5620} = 2.21 \text{ eV}$$

$$\text{Cioè: } hc = 12400 \text{ eV Å} = 1240 \text{ eV nm}$$

$$E_K = h\nu - \Delta E \rightarrow \text{per } \Delta E = \text{minimo} = W \rightarrow E_K(\max) = h\nu - W = \frac{hc}{\lambda} - W = \frac{12400}{2500} - 2.21 = 2.75 \text{ eV}$$

2) In un esperimento fotoelettrico  $\lambda = 300 \text{ nm}$ . Se  $E_K(\text{max}) = 1.2 \text{ eV}$  determinare la funzione lavoro  $W$ . Quale sarebbe la frequenza di soglia ?

$$E_K = h\nu - \Delta E$$

$$\text{Se } \Delta E = W \rightarrow E_K = E_K(\text{max}) = h\nu - W \rightarrow W = h\nu - E_K(\text{max}) = \frac{hc}{\lambda} - E_K(\text{max}) = \frac{1240}{300} - 1.2 = 2.93 \text{ eV}$$

$$E_K(\text{max}) = h\nu - W \rightarrow E_K(\text{max}) = 0 \rightarrow h\nu_0 - W = 0 \rightarrow h\nu_0 = W \rightarrow \nu_0 = \frac{W}{h} = \frac{2.93 \times 1.6 \times 10^{-19}}{6.63 \times 10^{-34}} = 0.7 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

Esiste anche la costante di Planck espressa in eV s:

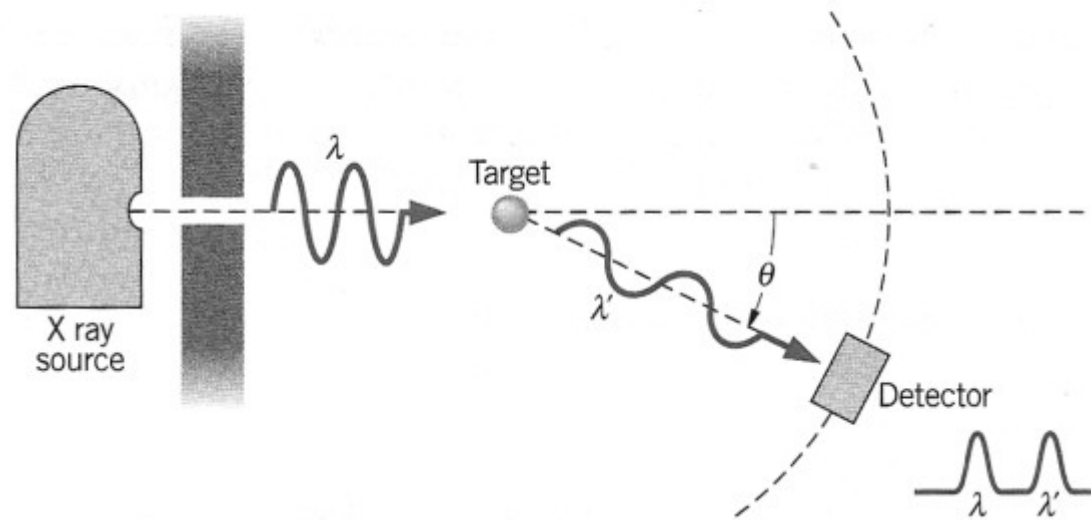
$$h \text{ (eV s)} = 4.14 \times 10^{-15} \text{ eV s}$$

Usando questo valore di  $h$ :

$$\nu_0 = \frac{W}{h} = \frac{2.93}{4.14 \times 10^{-15}} = 0.7 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

# Esperimento di Compton

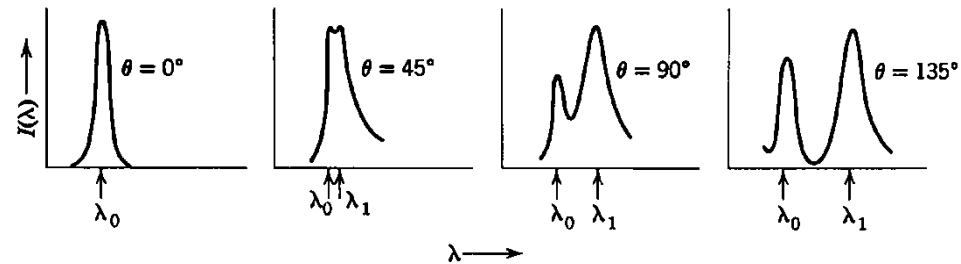
Nel 1923 A. Compton (Nobel nel 1927) osservò che raggi X, dopo aver “colpito” un sottile foglio metallico, possono essere deviati.



*Fig. Schema dell'esperimento di diffusione di raggi X (scattering Compton)*

Sperimentalmente, inviando raggi X di lunghezza d'onda monocromatica  $\lambda_0$  contro il foglio metallico, si osservavano i seguenti risultati:

- I raggi X misurati dopo il foglio metallico ad un angolo di deviazione nullo (in trasmissione) hanno la stessa lunghezza d'onda dei raggi X incidenti,  $\lambda_0$ ;
- Se spostiamo il detector di un angolo  $\theta$  rispetto alla direzione di incidenza si osservano raggi X di due lunghezze d'onda,  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$ , con  $\lambda_1 > \lambda_0$ ;
- La differenza  $\lambda_1 - \lambda_0$  dipende dall'angolo  $\theta$  al quale vengono misurati i raggi X;
- I risultati sono indipendenti dal foglio metallico utilizzato come bersaglio (successivamente Compton osservò gli stessi risultati usando raggi  $\gamma$ ) pertanto la diffusione dipende dall'interazione dei raggi X con gli elettroni



*Fig. Spettri dei raggi X diffusi da un foglio di carbone a vari angoli*

La spiegazione di Compton: i raggi X essendo fotoni, dalla teoria di Einstein, hanno energia:

$$E = h \nu = \frac{hc}{\lambda}$$

Pertanto

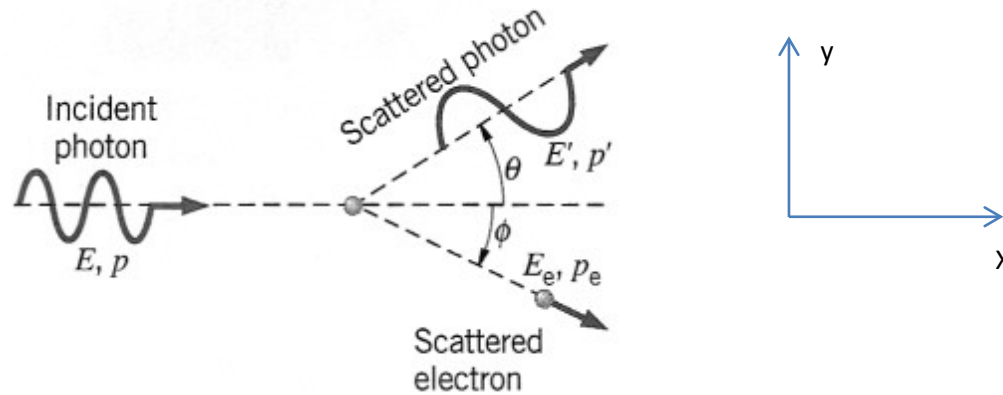
$$E_0 = \frac{hc}{\lambda_0} > E_1 = \frac{hc}{\lambda_1}$$

Quindi i fotoni con  $\lambda_1$  hanno perso energia nella diffusione.

Compton pertanto spiegò il fenomeno come un urto tra 2 particelle, il fotone e un elettrone (di valenza, quindi quasi libero, ma fermo) e utilizzò le equazioni della meccanica per l'urto: conservazione dell'energia e della quantità di moto:

$$\begin{aligned} E + m_0 c^2 &= E' + E_e \\ \bar{p} &= \bar{p}' + \bar{p}_e \end{aligned}$$

con  $m_0$  = massa a riposo dell'elettrone (dalla relatività),  $E$ ,  $p$  e  $E'$ ,  $p'$  l'energia e il momento del fotone prima e dopo l'urto,  $E_e$  e  $p_e$  l'energia e il momento dell'elettrone dopo l'urto.



Scomponendo i vettori quantità di moto nelle 2 componenti, la conservazione di  $p$  diventa:

$$p = p' \cos \theta + p_e \cos \phi \quad \text{componente } x$$

$$0 = p' \sin \theta - p_e \sin \phi \quad \text{componente } y$$

Per le energie, utilizzando le equazioni relativistiche:

$$E^2 = c^2 p^2 + (m_0 c^2)^2$$

si ottiene:

$$\text{per il fotone } (m_0=0): \quad E = c p \quad \rightarrow \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h \nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

$$\text{per l'elettrone:} \quad E_e^2 = c^2 p_e^2 + (m_0 c^2)^2$$

Inoltre per l'elettrone, dalla meccanica relativistica:

$$E_e = E_K + m_0c^2 \quad \text{con } E_K = \text{energia cinetica dell'elettrone}$$

quindi la conservazione dell'energia diventa:

$$E + m_0c^2 = E' + E_e$$

$$E + m_0c^2 = E' + E_K + m_0c^2$$

$$E = E' + E_K$$

$$E_K = E - E' = cp - cp' = c(p - p')$$

Dalle equazioni per il momento, facendo il quadrato e sommando, si ottiene:

$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta$$

Pertanto l'equazione dell'energia per l'elettrone si può riscrivere:

$$E_e^2 = c^2 p_e^2 + (m_0c^2)^2$$

:

$$(E_K + m_0c^2)^2 = c^2(p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta) + (m_0c^2)^2$$

$$E_K^2 + (m_0c^2)^2 + 2E_Km_0c^2 = c^2 (p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta) + (m_0c^2)^2$$

$$E_K^2 + 2E_Km_0c^2 = c^2 (p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta)$$

$$c^2(p - p')^2 + 2c(p - p')m_0c^2 = c^2 (p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta)$$

$$m_0c(p - p') = pp'(1 - \cos \theta)$$

$$p - p' = \frac{pp'}{m_0c} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{m_0c} (1 - \cos \theta)$$

Essendo  $p = \frac{h}{\lambda}$  pertanto:  $\frac{1}{p} = \frac{\lambda}{h}$  da cui:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \theta)$$

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \theta)$$

Con  $\lambda_c =$  lunghezza d'onda di Compton =  $2.426 \times 10^{-12}$  m

Da notare che  $\lambda' - \lambda$  dipende solo dall'angolo  $\theta$  e non dipende da  $\lambda$  o dal materiale!

La teoria di Compton spiegò perfettamente i dati sperimentali.

**Lo scattering Compton e la spiegazione data è la dimostrazione più evidente dell'esistenza dei fotoni e della loro natura duale: onde – particelle.**

Successivi esperimenti hanno provato a distinguere le due nature ma senza successo.

Successivamente De Broglie (1924) propose che, simmetricamente, anche le particelle avessero natura ondulatoria, proponendo che la lunghezza d'onda fosse collegata alla quantità di moto:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

La dimostrazione sperimentale fu data da Davisson and Germer (1927).